Partiel 1
Mardi 14 octobre 2014

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie

Une heure, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : L. Paoluzzi, T. Coulbois

Exercice I. Cours, 6 points

1. Donner la définition d'un ouvert d'un espace vectoriel normé.

2. Donner la caractérisation séquentielle d'un fermé d'un espace vectoriel normé.

Exercice II. 1. Dans $\mathbb{R}^2$ nous considérons le carré ouvert

$$C =]0;1[\times]0;1[= \{(x,y) \mid 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1\}.$$

Pour un point $A_0 = (x_0, y_0)$ de C, trouver $r > 0$ tel que la boule $B(A_0, r)$ est incluse dans C.

Prenons pour r la distance de A_0 aux côtés du carré :

$$r = \min(x_0, y_0, 1 - x_0, 1 - y_0)$$

(notons que les valeurs absolues ne sont pas nécessaires : ces quatre nombres sont strictement positifs). Alors $r > 0$ et la boule $B(A_0, r)$ est incluse dans C : une démonstration facile est de considérer la norme $\|u\|_\infty = \max(|x|, |y|)$ pour laquelle la boule précédente est le carré :

$$B_\infty(A_0, r) = \{(x,y) \mid 0 \leq x_0 - r < x < x_0 + r \leq 1 \text{ et } 0 \leq y_0 - r < y < y_0 + r \leq 1\}$$

ce qui montre bien l'inclusion dans le carré.
Une autre démonstration, avec la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ utilise le fait que $\|(x,y)\|_2 < r \Rightarrow |x| < r$ et $|y| < r$, puis le calcul de la première méthode.

2. On considère l'ensemble $\mathcal{H} = \{(x,y) \mid xy = 1\}$.

a. Tracer $\mathcal{H}$.

b. Montrer que $\mathcal{H}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy$ est continue et donc l'image réciproque $\mathcal{H} = \overset{-1}{f}(\{1\})$ du singleton $\{1\}$ qui est fermé est fermée.

c. Donner (en justifiant) l'intérieur $\mathring{\mathcal{H}}$.

Soit $A_0 = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que $x_0 y_0 = 1$. Soit $r > 0$ et $B(A_0, r)$ la boule de centre A_0 et de rayon r. Nous constatons que cette boule “dépasse” $\mathcal{H}$: le point $B = (x_0 + r/2, y_0)$ est dans $B(A_0, r)$ or $(x_0 + r/2)y_0 = x_0 y_0 + r/2 y_0 = 1 + r/2 y_0 \neq 1$ car $r > 0$ et $y_0 \neq 0$. Donc B n'appartient pas à $\mathcal{H}$, ce qui démontre que $B(A_0, r) \not\subseteq \mathcal{H}$. Nous avons donc démontré que $\mathcal{H}$ est d'intérieur vide.

Exercice III. On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ et les normes

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0;1]} |f(t)|.$$

Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$, alors $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ alors que $\|f_n\|_\infty = 1$
Si les deux normes étaient équivalentes, il existerait $A > 0$ tel que pour toute $f \in E$, $\|f\|_\infty < A\|f\|_1$ en particulier pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $1 < A\frac{1}{n+1}$ et donc $A > n+1$ ce qui est impossible.
Les deux normes ne sont donc pas équivalentes.