Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie

Partiel 1
Mardi 14 octobre 2014

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Une heure, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : L. Paoluzzi, T. Coulbois

Exercice I. Cours, 6 points

1. Donner la définition d'un ouvert d'un espace vectoriel normé.

2. Donner la caractérisation séquentielle d'un fermé d'un espace vectoriel normé.

Exercice II. **1.** Dans $\mathbb{R}^2$ nous considérons le carré ouvert

$$C =]0;1[\times]0;1[= \{(x,y) \mid 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1\}.$$

Pour un point $A_0 = (x_0, y_0)$ de C, trouver $r > 0$ tel que la boule $B(A_0, r)$ est incluse dans C.

2. On considère l'ensemble $\mathcal{H} = \{(x,y) \mid xy = 1\}$.

a. Tracer $\mathcal{H}$.

b. Montrer que $\mathcal{H}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

c. Donner (en justifiant) l'intérieur $\mathring{\mathcal{H}}$.

Exercice III. On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ et les normes

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|.$$

Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.