

Exercice I. Cours, 6 points

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Donner la définition d'un ouvert et d'un fermé de E . Montrer qu'une partie F de E est fermée si, et seulement si, pour toute suite de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F qui converge vers un point x de E alors $x \in F$.
2. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue pour la norme $\|\cdot\|$. Soit $\|\cdot\|_1$ une autre norme de E équivalente à $\|\cdot\|$. Montrer que f est continue pour la norme $\|\cdot\|_1$.
3. Donner la définition d'un compact et démontrer que l'image d'un compact par une application continue est compacte.

Exercice II. Soit O un ouvert d'un espace métrique (E, d) . Montrer que pour toute partie $A \subseteq E$, on a l'équivalence

$$A \cap O = \emptyset \iff \overline{A} \cap O = \emptyset.$$

Démontrons chacune des deux implications.

$\Rightarrow$ On suppose que $A \cap O = \emptyset$. Alors A est inclus dans le complémentaire $F = C_E(O)$. Par définition des fermés et comme O est ouvert, F est fermé. L'adhérence $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A , elle est donc incluse dans F . Ce qui démontre que $\overline{A} \cap O \subseteq F \cap O = C_E(O) \cap O = \emptyset$ et donc que $\overline{A} \cap O = \emptyset$.

$\Leftarrow$ On suppose que $\overline{A} \cap O = \emptyset$. Alors par définition de l'adhérence $A \subseteq \overline{A}$ et donc $A \cap O \subseteq \overline{A} \cap O = \emptyset$. Ce qui démontre que $A \cap O = \emptyset$.

Exercice III. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on pose :

$$\|P\|_\infty = \max\{|a_0|, \dots, |a_n|\} \text{ et } \|P\|_* = \sup\{|P(t)|, t \in [0, 1]\}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_*$ est une norme.

Comme une fonction polynômiale est continue et comme $[0; 1]$ est compact la borne supérieure dans la définition de la norme $\|\cdot\|_*$ est un maximum et c'est donc un nombre réel positif. De plus si elle est nulle alors le polynôme est constant nul sur l'intervalle $[0; 1]$, il a donc une infinité de racines, ce qui n'est possible que si le polynôme est nul. Bien sûr, cette norme est linéaire : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda P\|_* = \sup\{|\lambda P(t)|, t \in [0, 1]\} = |\lambda| \sup\{|P(t)|, t \in [0, 1]\} = |\lambda| \|P\|_*.$$

Enfin, quelque soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\|P + Q\|_* = \sup\{|P(t) + Q(t)|, t \in [0, 1]\}$. Or pour chaque réel t , l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue donne

$$|P(t) + Q(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)|.$$

Or

$$\forall t \in [0; 1], |P(t)| \leq \sup\{|P(t')|, t' \in [0, 1]\} = \|P\|_*$$

et

$$\forall t \in [0; 1], |Q(t)| \leq \sup\{|Q(t')|, t' \in [0, 1]\} = \|Q\|_*.$$

Donc

$$\forall t \in [0; 1], |P(t) + Q(t)| \leq \|P\|_* + \|Q\|_*$$

Et en prenant la borne supérieure

$$\|P + Q\|_* = \sup\{|P(t) + Q(t)|, t \in [0, 1]\} \leq \|P\|_* + \|Q\|_*.$$

Nous avons ainsi démontré que $\|\cdot\|_*$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes. (On pourra considérer les polynômes $P_n(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^n$)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $P_n(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^n$, alors

$$\|P_n\|_\infty = 1 \text{ et } \|P_n\|_* = n + 1$$

Ce qui montre que les rapports $\frac{\|P_n\|_*}{\|P_n\|_\infty}$ ne sont pas bornés. Nous avons ainsi démontré que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_*$ ne sont pas équivalentes.

3. Montrer que le sous-espace vectoriel $V = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$ n'est pas fermé pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Nous remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $Q_n(X) = 1 - \frac{1}{n+1}P_n(X)$ appartient à V . Vu les calculs ci-dessus, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 1$ et le polynôme constant égal à 1 n'appartient pas à V . Ce qui montre que V n'est pas fermé.

Exercice IV.

On considère le plan $E = \mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne d . Pour deux points $M, N \in \mathbb{R}^2$, on considère :

$$\delta(M, N) = \begin{cases} d(M, N) & \text{si } O, M \text{ et } N \text{ sont alignés} \\ d(O, N) + d(O, M) & \text{sinon} \end{cases}$$

(En particulier pour tout point M de $\mathbb{R}^2$: $\delta(O, M) = d(O, M)$.) On admet que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

Pour un point $C \in \mathbb{R}^2$ et un rayon $r > 0$, on considère

$$B_\delta(C, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \delta(C, M) < r\}.$$

1. Déterminer $B_\delta(O, r)$ pour tout $r > 0$.

D'après la définition pour tout point $M \in \mathbb{R}^2$, $\delta(O, M) = d(O, M)$ et donc $B_\delta(O, r)$ est la boule de centre O et de rayon r (pour la métrique euclidienne).

2. On considère les points $A = (1, 2)$, $B = (1, 1)$ et $C = (2, 4)$. Calculer $\delta(A, B)$, $\delta(A, C)$ et $\delta(B, C)$.

$$\delta(A, B) = d(O, A) + d(O, B) = \sqrt{5} + \sqrt{2}, \quad \delta(A, C) = d(A, C) = \sqrt{5} \text{ et } \delta(B, C) = d(O, B) + d(O, C) = \sqrt{2} + 2\sqrt{5}.$$

3. a. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que $\delta(A, M) < 1$.

Remarquons d'abord que si O, A et M ne sont pas alignés alors $\delta(A, M) = d(O, A) + d(O, M) \geq d(O, A) = \sqrt{5} > 1$. Nous en déduisons que si $\delta(A, M) < 1$ alors O, A et M sont alignés. L'ensemble cherché est donc le segment ouvert $]DE[$ où $D = (1 - \frac{\sqrt{5}}{5}, 2 - 2\frac{\sqrt{5}}{5})$ et $E = (1 + \frac{\sqrt{5}}{5}, 2 + 2\frac{\sqrt{5}}{5})$. Cette appellation de "segment ouvert" est fautive, car un segment désigne un compact, mais l'analogie avec les intervalles de $\mathbb{R}$ est parlante.

- b. Montrer que si $M \in \mathbb{R}^2$ n'appartient pas à la droite (OA) et $\delta(A, M) < 3$ alors M appartient à la boule euclidienne de centre O et de rayon $3 - \sqrt{5}$.

Puisque O, A et M ne sont pas alignés, $\delta(A, M) = d(O, A) + d(O, M) = \sqrt{5} + d(O, M)$ et donc $d(O, M) < 3 - \sqrt{5}$. Ce qui démontre que M est dans la boule euclidienne de centre O et de rayon $3 - \sqrt{5}$.

- c. Tracer $B_\delta(A, 3)$.

4. Pour tout point $D \neq O$, et pour tout $r > 0$, déterminer $B_\delta(D, r)$ si $r \leq d(O, D)$, puis si $r > d(O, D)$.

Comme précédemment, si $\delta(D, M) < r \leq d(O, D)$ alors O, D et M sont alignés. Dans ce cas $B_\delta(D, r)$ est le segment ouvert $]D_{-r}; D_r[$ où D_{-r} et D_r sont les deux points de la droite (OD) à distance (euclidienne) r de D .

Pour $r > d(O, D)$, comme à la question précédente, $B_\delta(D, r)$ est la réunion de la boule (euclidienne) de centre O et de rayon $r - d(O, D)$ et de le segment ouvert $]O; D_r[$ où D_r est le point de la droite (OD) à distance r de D et qui n'est pas sur la demi-droite issue de D contenant O .

5. En déduire que les parties de $\mathbb{R}^2$ ouvertes pour d sont ouvertes pour δ .

D'après la définition pour tous points M, N de $\mathbb{R}^2$, $\delta(M, N) \geq d(M, N)$ (ces deux distances sont égales si, O, M et N sont alignés et sinon l'inégalité triangulaire de la distance euclidienne d donne l'inégalité). Pour tout $r > 0$ et tout point M , nous en déduisons que $B_\delta(M, r) \subseteq B_d(M, r)$. Pour tout ouvert U pour la métrique euclidienne, pour tout point M de U il existe $r > 0$ tel que $B_d(M, r) \subseteq U$ et donc $B_\delta(M, r) \subseteq U$. Ce qui démontre que U est ouvert pour la distance δ .

Dans la suite on suppose $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie induite par δ .

6. Soit H le demi-plan ouvert supérieur : $H = \{(x, y); y > 0\}$.

- a. Montrer que H est ouvert.

Soit $C = (x, y)$ un point de H , alors $0 < y \leq d(O, C)$, et $B_\delta(C, \frac{y}{2})$ est un segment ouvert inclus dans H . Ce qui montre que H est ouvert.

- b. Déterminer $\overline{H}$.

Notons d'abord que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de points tels que $A_n = (0, \frac{1}{n})$ converge (pour la distance δ) vers l'origine O .

Donc $O \in \overline{H}$.

Montrons que $\overline{H} = H \cup \{O\}$. Pour cela il suffit de démontrer que son complémentaire $U = H^C \setminus \{O\}$ est ouvert. U est la réunion de $-H = \{(x, y) \mid y < 0\}$, dont nous montrerions comme ci-dessus qu'il est ouvert, et de $V = \{(x, 0) \mid x \neq 0\}$. Comme ci-dessus pour tout point $C = (x, 0) \in V$, $B_\delta(C, \frac{|x|}{2})$ est l'intérieur d'un segment horizontal qui ne contient pas O et est donc inclus dans V . Ainsi V est ouvert et U est la réunion de deux ouverts donc ouvert.

Nous avons donc démontré que $\overline{H} = H \cup \{O\}$.

7. Soit $u = (1, 0)$ et $t_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la translation de vecteur u . Montrer que t_u n'est pas continue.

Reprenons la suite de points $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la question précédente. Nous avons déjà vu qu'elle converge vers O . Un rapide calcul nous montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\delta(t_u(A_n), t_u(O)) = d(O, t_u(A_n)) + d(O, t_u(O)) = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \neq 0.$$

La suite $t_u(A_n)$ ne converge donc pas vers $t_u(O)$ ce qui montre que la translation t_u n'est pas continue pour la distance δ .