Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie

Partiel 1
Mardi 18 novembre 2014

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Trois heures, ni calculatrices, ni documents — Enseignant-es : T. Coulbois, L. Paoluzzi, G. Rond

Exercice I. Cours, 6 points
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
1. Donner la définition d'un ouvert et d'un fermé de E. Montrer qu'une partie F de E est fermée si, et seulement si, pour toute suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F qui converge vers un point x de E alors $x \in F$.
2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue pour la norme $\|\cdot\|$. Soit $\|\cdot\|_1$ une autre norme de E équivalente à $\|\cdot\|$. Montrer que f est continue pour la norme $\|\cdot\|_1$.
3. Donner la définition d'un compact et démontrer que l'image d'un compact par une application continue est compacte.

Exercice II. Soit O un ouvert d'un espace métrique (E, d). Montrer que pour toute partie $A \subseteq E$, on a l'équivalence

$$A \cap O = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A} \cap O = \emptyset.$$

Exercice III. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose :

$$\|P\|_\infty = \max\{|a_0|, \cdots, |a_n|\} \text{ et } \|P\|_* = \sup\{|P(t)|,\ t \in [0,1]\}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_*$ est une norme.
2. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes. (On pourra considérer les polynômes $P_n(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n$)
3. Montrer que le sous-espace vectoriel $V = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$ n'est pas fermé pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice IV.
On considère le plan $E = \mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne d. Pour deux points $M, N \in \mathbb{R}^2$, on considère :

$$\delta(M, N) = \begin{cases} d(M, N) & \text{si } O,\ M \text{ et } N \text{ sont alignés} \\ d(O, N) + d(O, M) & \text{sinon} \end{cases}$$

(En particulier pour tout point M de $\mathbb{R}^2$: $\delta(O, M) = d(O, M)$.) On admet que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.
Pour un point $C \in \mathbb{R}^2$ et un rayon $r > 0$, on considère

$$B_\delta(C, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \delta(C, M) < r\}.$$

1. Déterminer $B_\delta(O, r)$ pour tout $r > 0$.
2. On considère les points $A = (1, 2)$, $B = (1, 1)$ et $C = (2, 4)$. Calculer $\delta(A, B)$, $\delta(A, C)$ et $\delta(B, C)$.
3. **a.** Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que $\delta(A, M) < 1$.

b. Montrer que si $M \in \mathbb{R}^2$ n'appartient pas à la droite (OA) et $\delta(A,M) < 3$ alors M appartient à la boule euclidienne de centre O et de rayon $3-\sqrt{5}$.
c. Tracer $B_\delta(A,3)$.
4. Pour tout point $D \neq O$, et pour tout $r > 0$, déterminer $B_\delta(D,r)$ si $r \leq d(O,D)$, puis si $r > d(O,D)$.
5. En déduire que les parties de $\mathbb{R}^2$ ouvertes pour d sont ouvertes pour δ.
Dans la suite on suppose $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie induite par δ.
6. Soit H le demi-plan ouvert supérieur : $H = \{(x,y);\ y > 0\}$.
a. Montrer que H est ouvert.
b. Déterminer $\overline{H}$.
7. Soit $u = (1,0)$ et $t_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la translation de vecteur u. Montrer que t_u n'est pas continue.