Manipulation des ε

Exercice I. **1.** Montrer que la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.
2. On considère la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0;+\infty[$. Pour $\varepsilon = 10^{-2}$ trouver η tel que

$\forall x \in [0;+\infty[, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \varepsilon$ **a.** pour $x_0 = 1$ **b.** pour $x_0 = 0$

c. Montrer que la fonciton $\sqrt{\ }$ est uniformément continue sur $[0;+\infty[$
3. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice II. **1.** Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ne converge pas.
2. Étudier les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice III. On considère la suite de Fibonacci $F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
1. En utilisant l'équation caractéristique des suites définies par récurrence linéaire, montrer que le terme général est

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n\right) \text{ où } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2. Trouver un entier N pour lequel $\forall n \geq N, \left|\frac{F_{n+1}}{F_n} - \varphi\right| \leq \varepsilon$ **a.** avec $\varepsilon = 10^{-2}$ **b.** avec $\varepsilon = 10^{-6}$

Exercice IV. On rappelle que la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on ne demande pas de démontrer ce résultat.
1. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N}$$

2. Pour quelle valeur de N la somme partielle $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ est-elle une approximation de $\frac{\pi^2}{6}$ avec une précision de $\varepsilon = 10^{-2}$?
3. Comment cette série peut-elle vous donner une approximation π avec dix chiffres de précision ?

Exercice V. **1.** Trouver un disque de centre $(\frac{4}{5}, 0.9)$ inclus dans le carré unité.
2. Trouver un disque de centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ inclus dans le triangle équilatéral $0, 1, e^{i\frac{\pi}{3}}$.
3. On considère $\mathcal{P} = \{(x, y) \mid y > x^2\}$.
a. Faire un dessin.
b. Trouver un disque de centre $(1, 2)$ inclus dans $\mathcal{P}$.
c. Soit $A_0 = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{P}$. Trouver un disque de centre A_0 inclus dans $\mathcal{P}$: vous exprimerez le rayon r de ce disque en fonction de x_0 et y_0.
4. Reprendre la dernière question en remplaçant $\mathcal{P}$ par le carré unité et par le triangle équilatéral des questions précédentes.
5. Trouver une boule de centre $(1, 2, 3)$ incluse dans le cône $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < z^2\}$

Limites, continuité

Exercice VI. Montrer que la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ et $f(0) = 0$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice VII. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction définie par $g(x) = \arctan \frac{1}{x^2}$ et $g(0) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice VIII. On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $h(x) = 0$ pour tout x irrationnel et $h(x) = \frac{1}{q}$ pour tout nombre rationnel $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$.
1. Montrer que h est continue en tout point x irrationnel.
2. Montrer que h est discontinue en tout point x rationnel.
3. *(difficile)* Étudier la dérivabilité de h.

Exercice IX. Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions défnies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$

2. $g(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ et $g(0,0) = 0$

Normes, distances et boules

Exercice X. On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions suivantes définies pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\|x,y\|_1 = |x| + |y|, \quad \|x,y\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \quad \|x,y\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$$

1. Montrer que ces trois fonctions sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner pour chacune d'entre elles la boule unité.
3. Décrire pour chacune d'entre elles la boule de centre 0 et de rayon r.
4. Comparer ces trois normes.
5. En déduire qu'elles définissent les mêmes ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Exercice XI.
Les égalités suivantes définissent-elles des distances ? Si oui, décrire la boule de centre 0 et de rayon 1. Lesquelles sont issues d'une norme ?
a) $d(x,y) = |x-y|$ sur $\mathbb{R}$;
b) $d(x,y) = |x^2-y^2|$ sur $\mathbb{R}$;
c) $d(x,y) = |x^3-y^3|$ sur $\mathbb{R}$;
d) $d(x,y) = |x^{-1}-y^{-1}|$ sur $\mathbb{R}^*$;
e) $d(f,g) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$ sur $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$;
f) $d(f,g) = \displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$;
g) $d(f,g) = \displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ sur l'espace des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$.

Exercice XII. 1) Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que $d' = \inf(1,d)$ fait de X un espace métrique borné.
2) Soient $X = \mathbb{R}^n$ et $d = d_\infty$ la distance définie par $d_\infty(x,y) = \max(|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|)$. Déterminer dans $(\mathbb{R}^2,d')$ les boules ouvertes et fermées.

Exercice XIII. *Comparaison de normes.*

1. Sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on définit les deux normes suivantes : $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$ et $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Comparer ces deux normes.

2. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables. On pose pour $f \in E$, $N(f) = (f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,dt)^{1/2}$. Montrer que N est une norme sur E et la comparer à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Adhérence, intérieure

Exercice XIV. Soit $A =]0,1[\cup]1,2[\cup(\mathbb{Q}\cap]2,3[) \cup \{4\}$. Déterminer $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ et $\overline{\mathring{\overline{A}}}$.

Exercice XV. Dans $\mathbb{R}^2$, nous considérons les ensembles suivants :

– le segment unité vertical : $I = \{0\} \times [0;1]$
– le disque ouvert D de centre $J = (0,1)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
– le demi-cercle inférieur S qui borde D : $S = \{(x,y) \mid x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$ et $y < 1\}$.

1. Faire un dessin.
2. I, D et S sont-ils ouverts ? Fermés ?
3. On considère $L = I \cup D \cup S$.
a. Décrire l'adhérence $\overline{L}$ et l'intérieur $\mathring{L}$ de L.
b. Comparer $\mathring{\overline{L}}$ et $\overline{\mathring{L}}$.
4. Soit $V_1(L) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \exists A \in L, d(M,A) < 1\}$.

a. Dessiner $V_1(L)$.
b. Montrer que $V_1(L)$ est ouvert.

Exercice XVI. **1.** Déterminer dans $\mathbb{R}$, l'intérieur, l'adhérence, la frontière de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ ainsi que de son complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $I =]\frac{1}{2}, 1[$
3. On considère $A = [0, 1[$ muni de la métrique induite par celle de $\mathbb{R}$. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de I comme partie de A.

Démonstrations

Exercice XVII. Vérifiez les égalités suivantes, pour des parties d'un espace métriques :

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B} \qquad \mathring{A} \cap \mathring{B} = \overbrace{A \cap B}^{o} \ .$$

Montrer que cela reste vrai pour une réunion finie d'adhérences et une intersection finie d'ouverts. Trouver un contre-exemple pour une réunion infinie d'adhérences et une intersection infinie d'ouverts.

Exercice XVIII. Soient (E, d) un espace métrique, A une partie de E et B une partie de A. On munit A de la métrique induite par celle de E.
a) Montrer que l'intérieur de B dans l'espace métrique (A, d) contient l'intérieur de B dans l'espace métrique (E, d).
b) On suppose que A est ouverte dans (E, d). Montrer que l'intérieur de B dans (A, d) coïncide avec l'intérieur de B dans (E, d).

Exercice XIX. Soit O un ouvert d'un espace métrique (E, d). Montrer que pour toute partie $A \subset E$, on a l'équivalence :

$$A \cap O = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A} \cap O = \emptyset \ .$$

Exercice XX. Soit F un fermé d'un espace métrique (E, d). Montrer que pour toute partie A de E on a l'équivalence :

$$A \cup F = E \Longleftrightarrow \mathring{A} \cup F = E.$$

Exercice XXI. Soit U un ouvert d'un espace métrique. Montrer que la frontière de U est d'intérieur vide.

Divers

Exercice XXII. *Une métrique sur l'espace des suites.*
Soit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{K}$-e.v. des suites de nombres réels ou complexes. On rappelle que les opérations d'e.v. sont définies par $x + y = (x_n + y_n)_n$ et $\lambda x = (\lambda x_n)_n$ pour $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$. On pose $d(x, y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$. Montrer que $d(x, y)$ existe pour tout $(x, y) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$ et définit une distance sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Exercice XXIII. *distance à une partie* Soit A une partie non vide d'un espace métrique (X, d). Pour tout $x \in X$, on pose :

$$d_A(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, y) | y \in A\}$$

1. Soit $x \in X$. Montrer que $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$.
2. Pour $\varepsilon > 0$ on pose :

$$V_\varepsilon(A) = \{\ x \in X | d(x, A) < \varepsilon\}.$$

Montrer que $\overline{A} = \displaystyle\bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon(A)$.
3. Etant données deux parties non vides A et B de X, montrer que $d_A = d_B \iff \overline{A} = \overline{B}$.

Consultez régulièrement `http://www.i2m.univ-amu.fr/~coulbois/2015/topo`.