

Connexité

Exercice 1 Soit A une partie connexe d'un espace métrique X . Montrer que toute partie B telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.

Exercice 2

1. Soient A et B deux parties connexes telles que $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.
2. On suppose maintenant que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.

Exercice 3 Déterminer les parties connexes de $\mathbb{Q}$.

Exercice 4 Montrer que

- 1) $[0, 1]$ et un cercle de $\mathbb{R}^2$ ne peuvent pas être homéomorphes,
- 2) $[a, b[$ et $]a, b[$ ne peuvent pas être homéomorphes.

Exercice 5 On considère le graphe de la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x} : \mathcal{G} = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$.

1. Déterminer l'adhérence $\overline{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$.
2. Montrer que $\overline{\mathcal{G}}$ est connexe

Exercice 6 Montrer que, dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension au moins deux, toute sphère est connexe par arcs. En déduire que si $C \subset E$ est convexe borné alors $E \setminus C$ est connexe par arcs.

Exercice 7 Soit $M_n(\mathbb{C})$ (respectivement $M_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$), et soit $GL_n(\mathbb{C})$ (resp. $GL_n(\mathbb{R})$) celles de déterminant non-nul. On considère M_n comme espace vectoriel normé avec n'importe quelle norme.

- 1) Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ et $P(z)$ le polynôme $P(z) = \det(Az + (1 - z)B)$.

Montrer que 0, 1 ne sont pas des racines de $P(z)$.

Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. (On admet que $\mathbb{C}$ privé d'un ensemble fini est connexe par arcs.)

- 2) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.
- 3) Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe

Exercice 8 Montrer que $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs. Soit A une partie discrète de $\mathbb{R}^2$, montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ est connexe par arcs.

Exercice 9 Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans un espace métrique quelconque. Montrer que cette suite converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

Exercice 10 Une métrique complète sur $\mathbb{N}$.

Soit $a > 0$ quelconque. On définit d par $d(m, n) = a + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}$, pour $m \neq n$ et $d(n, n) = 0$. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}$, et que $(\mathbb{N}, d)$ est complet.

Exercice 11 Une métrique non complète sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $d(x, y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$ définit une distance sur $\mathbb{R}$ et que l'espace $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet (on pourra considérer la suite $u_n = n$ et se rappeler que $\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$).

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application injective. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on définit $d(x, y) = \|f(x) - f(y)\|$. Montrer que $(\mathbb{R}, d)$ est complet si et seulement si $f(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13 $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\bullet\|_1)$ n'est pas complet

Trouver une suite (f_n) qui soit de Cauchy dans $E := (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\bullet\|_1)$ et qui ne converge pas dans E . (On pourra, pour chaque n , couper $[0, 1]$ en trois intervalles tels que f_n soit nulle sur le premier, affine sur le second et égale à 1 sur le troisième).

Exercice 14 Non équivalence des normes $\|\bullet\|_\infty$ et $\|\bullet\|_1$ sur c_{00}

On pose

$$c_{00} := \{X = (x_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; x_i = 0 \text{ à partir d'un certain rang}\}.$$

Soit (X_n) , $X_n = (x_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$, la suite de points de l'espace c_{00} définie par $x_{n,i} = (1+i)^{-1}$ pour $i < n$, $x_{n,i} = 0$ pour $i \geq n$. Soient $E_\infty = (c_{00}, \|\bullet\|_\infty)$ et $E_1 = (c_{00}, \|\bullet\|_1)$. Montrer que (X_n) est une suite de Cauchy dans E_∞ et pas dans E_1 . En déduire que les normes $\|\bullet\|_\infty$ et $\|\bullet\|_1$ ne sont pas équivalentes sur l'espace c_{00} .

Exercice 15 Soient K un espace métrique compact et F un espace métrique complet. On note $C^0(K, F)$ l'ensemble des fonctions continues de K vers F que l'on munit de la distance suivante :

$$d(f, g) := \sup_{x \in K} d_F(f(x), g(x)) \quad \forall f, g \in C^0(K, F).$$

Montrer que $(C^0(K, F), d)$ est un espace métrique complet.

Exercice 16 $E_\infty = (c_{00}, \|\bullet\|_\infty)$ et $E_1 = (c_{00}, \|\bullet\|_1)$ ne sont pas complets

Soit $(X_n)_n$, $X_n = (x_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$, la suite de points de l'espace c_{00} définie par $x_{n,i} = 2^{-i}$ pour $i \leq n$, $x_{n,i} = 0$ pour $i > n$.

1/ Montrer que $(X_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E_1 et en déduire qu'elle l'est aussi dans E_∞ .

2/ Montrer que E_∞ n'est pas complet et en déduire que E_1 ne l'est pas non plus.

Exercice 17 $E = (c_0, \|\bullet\|_\infty)$ est complet

On pose

$$c_0 := \{X = (x_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0\}$$

1/ Montrer que c_0 est une partie fermée de l^∞ . En déduire que E est complet.

2) Montrer que c_{00} est dense dans E . En déduire une nouvelle démonstration de l'exercice précédent.

3/ Montrer que tout élément $X = (x_n)$ de c_0 est somme de la série de terme général $x_n e_n$ où (e_n) est la suite canonique de c_0 .

Exercice 18 l^p est complet

1/ Montrer que l'espace $(l^p, \|\bullet\|_p)$, où p est un réel ≥ 1 , est complet.

2/ Montrer que tout élément $X = (x_n)$ de l^p est somme de la série de terme général $(x_n e_n)$ où (e_n) est la suite canonique de l^p .

Exercice 19 $E = (c, \|\bullet\|_\infty)$ est complet

On désigne par c le sous-espace de l^∞ formé des suites convergentes. Montrer que c est une partie fermée de l^∞ muni de la norme infinie (par exemple, raisonner en $\varepsilon/3$) et donc que E est complet.

Exercice 20 *Extension du théorème du point fixe*

Soient E un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ tels que pour un entier $p > 0$ la fonction f^p soit une contraction.

1/ Montrer que f possède un point fixe.

2/ Montrer que ce point fixe est unique. On le note a .

3) Montrer que a est la limite de la suite définie par $x_{k+1} = f(x_k)$ où x_0 est un point arbitraire de E .

Exercice 21 *Une application du théorème du point fixe*

Soient $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et ε un réel tel que $0 < \varepsilon \leq 1$. On pose $I = [0, \varepsilon]$ et $B = \{y \in \mathbb{R}^n; \|y - y_0\| \leq 1\}$. L'espace $E = C(I, B)$ est muni de la distance induite par la norme uniforme sur $C(I, \mathbb{R}^n)$.

1/ Montrer que (E, d) est un espace métrique complet.

2/ A tout $f \in E$ on associe $G(f)$ défini par

$$G(f)(t) = y_0 + \int_0^t e^s f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon.$$

Si ε est assez petit montrer que $G(E) \subset E$ et que l'application G est contractante. Déterminer alors le point fixe de G .