Exercice I. **1.** Rappeler et démontrer la construction du triangle de PASCAL
2. Formule du multinôme : développer : $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n$.

Exercice II. **1.** Écrire la table de multiplication de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
2. Démontrer que l'ensemble des entiers de GAUSS : $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un anneau. Donner les éléments inversibles de cet anneau.
3. Soit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or. Montrer que $\mathbb{Z}[\varphi] = \{a + b\varphi \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un anneau.

Exercice III. **1.** Pour deux nombres réels, $a < b$, montrer que l'ensemble $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[a;b]$ à valeurs réelles est un anneau (vous expliciterez l'addition, la mulitplication et les éléments neutres O et 1). Quels sont les éléments inversibles de cet anneau.
2. Donner deux fonctions non nulles $f, g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telles que $f \cdot g = 0$.
3. Montrer que l'application $\begin{array}{rcl} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(a) \end{array}$ est un morphisme d'anneaux.
4. L'application $\begin{array}{rcl} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(t)\,dt \end{array}$ est-elle un morphisme d'anneaux ?

Exercice IV. **1.** Démontrer que $\mathbb{Q}[i] = \{a+ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps. Exprimer l'inverse de $a+ib$ en fonction de a et b.
2. Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps.

Exercice V. **1.** Démontrer que l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable.
2. Démontrer que l'ensemble des polynômes à coefficients réels a le cardinal du continu.
3. Combien y a-t-il de polynômes de degré 7 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

Exercice VI. **1.** Effectuer la division euclidienne de $3X^7 - 21X^5 + 2X^4 - X^3 + 7$ par $X^3 - 5X^2 + 2X$.
2. Démontrer que le polynôme $X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1$ divise $X^{15} - 1$.

Exercice VII. **1.** Trouver deux nombres x et y dont la somme est 6 et le produit est 10.
2. Soit α_1, α_2 et α_3 les racines (complexes, pas nécessairement distinctes), d'un polynôme unitaire de degré 3 : $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$. Démontrer que $-a = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $b = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$ et $c = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3$.
3. Soit α_1, α_2 et α_3 les racines (complexes, pas nécessairement distinctes), du polynôme : $P(X) = X^3 + bX + c$. Soit $A = \alpha_1 + j\alpha_2 + j^2\alpha_3$ et $B = \alpha_1 + j^2\alpha_2 + j\alpha_3$. Calculer AB et $A^3 + B^3$ en fonction de a, b et c.

Exercice VIII. Dans La Géométrie, DESCARTES, propose de tracer les courbes polynomiales, grâce au dispositif décrit dans la figure jointe. Démontrer que si $YB = 1$ alors YE est égal au cube de YA.

Exercice IX. **1.** Calculer une primitive de $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$.
2. Calculer une primitive de $g(x) = \dfrac{x^2+3}{(x-1)^3}$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 4 de $\dfrac{x}{\ln(1+x)}$.

Exercice X. Tracer les courbes d'équations :

$$E : 5X^2 - 4XY + 8Y^2 - 3X + 2Y - 10 = 0 \quad \text{et} \quad H : -6X^2 + 24XY + Y^2 + 2Y = 0$$