

## Problème 2 : décimales des nombres rationnels

### Notations et définitions

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}$  et  $\mathbb{Q}$  désignent respectivement l'ensemble des nombres entiers naturels, celui des nombres entiers relatifs, celui des nombres décimaux et celui des nombres rationnels.

Un nombre réel  $x$  est dit *décimal* s'il existe un entier  $n$  tel que  $10^n x \in \mathbb{Z}$ .

On dit qu'une suite d'entiers naturels  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décimale si, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $0 \leq d_n \leq 9$ , le premier terme  $d_0$  étant un entier naturel quelconque.

Une suite décimale est dite *finie* si tous ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Elle est dite :

- *impropre* si tous ses termes sont égaux à 9 à partir d'un certain rang ;
- *propre* dans le cas contraire du précédent.

On définit pour tout réel  $x$  la partie entière de  $x$ , notée  $E(x)$ , par la condition :  $E(x)$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .

Le but de ce problème est de démontrer quelques propriétés des nombres décimaux, puis d'étudier les décimales des nombres rationnels non décimaux.

### Partie A : nombres décimaux

1. Démontrer que  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$  et que ces inclusions sont strictes.
2. Démontrer que l'ensemble  $\mathbb{D}$  est stable pour l'addition et la multiplication.
3. Soit  $x$  un nombre rationnel positif. On pose  $x = \frac{a}{b}$ , avec  $a$  et  $b$  entiers naturels premiers entre eux et  $b \neq 0$ .
  - 3.1. On suppose qu'il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ , tels que  $b = 2^\alpha \times 5^\beta$ . Démontrer que  $x$  est décimal.
  - 3.2. On suppose que  $x$  est un décimal non entier.  
Démontrer que si  $p$  est un diviseur premier de  $b$ , alors  $p \in \{2, 5\}$ .
  - 3.3. Dédurre des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante sur  $b$  pour que le rationnel  $x$  soit un nombre décimal.
4. On considère une suite décimale  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - 4.1. Démontrer que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$  est convergente. On note  $x$  sa limite.
  - 4.2. Démontrer que dans les deux cas suivants  $x$  est un nombre décimal :
    - la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est finie ;
    - la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est impropre.
  - 4.3. Démontrer que pour tout entier  $N \geq 0$ , on a  $\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \leq \frac{1 + d_N}{10^N}$ , avec égalité si et seulement si, pour tout  $k \geq N + 1$ ,  $d_k = 9$ .
  - 4.4. En déduire que si  $x$  est un réel vérifiant  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$  et si  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décimale propre, alors la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant cette égalité est unique.  
  
Si  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ , avec  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite décimale propre, on note alors  $x = d_0, d_1 d_2 \dots d_n \dots$  et on dit que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $d_n$  est la  $n$ -ième décimale du réel  $x$ .
5. Démontrer que pour tout nombre décimal positif  $x$ , il existe une unique suite décimale finie  $(d_n)_{0 \leq n \leq N}$  telle que  $x = \sum_{n=0}^N \frac{d_n}{10^n}$ .

## Parte B : périodicité des décimales d'un rationnel positif non décimal

Soit  $x$  un nombre rationnel positif **non décimal**. On pose  $x = \frac{a}{b}$ , avec  $a$  et  $b$  entiers naturels premiers entre eux.

On définit par récurrence deux suites d'entiers naturels  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la manière suivante :

- $d_0$  et  $r_0$  sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  ;
- pour tout  $n \geq 0$ ,  $d_{n+1}$  et  $r_{n+1}$  sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de  $10r_n$  par  $b$ .

1. Soit  $N$  un entier tel que  $N \geq 1$ .

1.1. Écrire un algorithme permettant d'afficher les entiers  $d_n$  et  $r_n$  de  $n = 0$  jusqu'au rang  $N$ .  
*On suppose disposer d'une instruction calculant la partie entière  $E(y)$  d'un réel  $y$ .*

1.2. Donner pour le rationnel  $x = \frac{5}{13}$  les valeurs de  $d_n$  et  $r_n$  jusqu'au rang  $N = 7$ .

2. 2.1. Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n$  :  $x = \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}$ .

2.2. En déduire que, pour tout entier  $n$ ,  $r_n$  est le reste de la division euclidienne de  $10^n a$  par  $b$ .

2.3. Démontrer que  $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$  et que  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décimale propre.

3. Dans cette question, on va établir que les suites  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont périodiques à partir d'un certain rang.

3.1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $r_n \neq 0$ .

3.2. Démontrer que les nombres  $r_0, r_1, \dots, r_{b-1}$  ne peuvent pas être deux à deux distincts.

3.3. Soit  $q$  le plus petit indice d'un reste figurant au moins deux fois dans la liste de la question précédente et  $q'$  l'indice du premier autre reste qui lui est égal.

On pose  $p = q' - q$ , de sorte que  $0 \leq q < q + p \leq b - 1$  et  $r_q = r_{q+p}$ .

Démontrer que la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est périodique de période  $p$  à partir du rang  $q$  et que la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est périodique de période  $p$  à partir du rang  $q + 1$ .

*Dans la suite, on dit que  $q$  est la pré-période du rationnel  $x$  et  $p$  sa période.*

*On note alors  $x = d_0, d_1, \dots, d_q [d_{q+1} \dots d_{q+p}]$  si  $q \geq 1$  et  $x = d_0, [d_1 \dots d_p]$  si  $q = 0$ .*

4. On conserve dans cette question les notations précédentes.

4.1. i. Démontrer que parmi les nombres  $10^0, 10^1, \dots, 10^{b-1}$ , au moins deux d'entre eux sont congrus modulo  $b$ .

ii. Démontrer que :

-  $q$  est le plus petit exposant d'un nombre de la liste précédente qui est congru modulo  $b$  à un autre nombre de cette liste ;

-  $q + p$  est l'exposant du premier nombre de cette liste congru à  $10^q$  modulo  $b$  et distinct de  $10^q$ .

4.2. Démontrer que le rationnel  $x = \frac{a}{b}$  a la même période et la même pré-période que  $\frac{1}{b}$ .

*Dans la suite, lorsque la fraction  $\frac{1}{b}$  est non décimale,  $q$  et  $p$  seront nommés « la pré-période et la période de l'entier  $b$  ».*

5. Déterminer la pré-période et la période des entiers suivants : 7; 12; 112.

## Partie C : détermination de la pré-période

On considère un entier  $b$  supérieur ou égal à 2 tel que la fraction  $\frac{1}{b}$  soit non décimale et on note  $\omega(b)$  sa pré-période et  $\pi(b)$  sa période.

1. Dans cette question, on suppose que  $b$  est premier avec 10.
  - 1.1. Démontrer l'équivalence :  $10^q \equiv 10^{q+p}$  modulo  $b \Leftrightarrow 10^p \equiv 1$  modulo  $b$ .
  - 1.2. En déduire que  $\omega(b) = 0$ .
2. Dans cette question, on pose  $b = 2^j \times 5^k \times c$ , où  $c$  est un entier premier avec 10. Démontrer que  $\pi(b) = \pi(c)$  et que  $\omega(b) = \max(j, k)$ .

*On pourra montrer que :*  
 $10^q (10^p - 1)$  multiple de  $b \Leftrightarrow 10^q$  multiple de  $2^j \times 5^k$  et  $10^p - 1$  multiple de  $c$ .
3. Application : déterminer la période et la pré-période des nombres 150 et 1120.

## Partie D : détermination de la période

Dans cette partie, on se propose de déterminer la période des entiers supérieurs ou égaux à 2, qui sont premiers avec 10, en fonction de leur décomposition en facteurs premiers. Si  $b$  est un tel entier, d'après la partie C, sa période  $\pi(b)$  est le plus petit entier  $n$  non nul tel que  $10^n \equiv 1$  modulo  $b$ .

1. Dans cette question,  $b$  est un nombre premier distinct de 2 et 5.
  - 1.1. On note  $\bar{a}$  la classe d'un entier  $a$  dans  $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$  et  $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$  l'ensemble  $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$  privé de  $\bar{0}$ .  
Démontrer que l'application  $f : \begin{cases} (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \rightarrow (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \\ \bar{a} \mapsto \overline{10} \times \bar{a} \end{cases}$  est bien définie et injective.
  - 1.2. En utilisant la question précédente, démontrer que :  $10^{b-1} \equiv 1$  modulo  $b$ .
  - 1.3. Démontrer que si  $r$  est le reste de la division euclidienne d'un entier  $n$  par un entier  $m$ , alors  $10^r - 1$  est le reste de la division euclidienne de  $10^n - 1$  par  $10^m - 1$ .

*On pourra utiliser une forme factorisée de  $x^n - 1$ , où  $x$  désigne un réel quelconque.*
  - 1.4. Déduire des résultats précédents que :
    - si un entier  $k$  vérifie  $10^k \equiv 1$  modulo  $b$ , alors  $\pi(b)$  divise  $k$  ;
    - $\pi(b)$  divise  $b - 1$ .
2. Dans cette question,  $b$  et  $c$  sont deux entiers premiers avec 10 et premiers entre eux.
  - 2.1. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Démontrer que  $10^n \equiv 1$  modulo  $bc$  si et seulement si  $n$  est un multiple de  $\pi(b)$  et de  $\pi(c)$ .
  - 2.2. En déduire que  $\pi(bc) = \text{ppcm}(\pi(b), \pi(c))$ .
3. Dans cette question,  $b$  est un entier de la forme  $p^n$ , où  $p$  est un nombre premier distinct de 2 et 5, et  $n$  un entier naturel non nul. On pose  $\pi(p) = \ell$ .
  - 3.1. Justifier l'existence de deux entiers  $q$  et  $r$  tels que  $r \geq 1$  et  $10^\ell - 1 = p^r \times q$ .
  - 3.2. *Premier cas* :  $n \leq r$ . Démontrer que  $\pi(p^n) = \ell$ .
  - 3.3. *Deuxième cas* :  $n > r$ .  
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $k$ , il existe un entier naturel  $Q$  premier avec  $p$  tel que  $10^{\ell \times p^k} - 1 = p^{r+k} \times Q$  et que  $\pi(p^{r+k}) = \ell \times p^k$ .  
En déduire que  $\pi(p^n) = \ell \times p^{n-r}$ .
4. *Applications*
  - 4.1. Déterminer la période des entiers 3,  $3^2$ ,  $3^3$ ,  $3^4$ , 7,  $7^2$  et  $7^3$ .
  - 4.2. En déduire la période de l'entier 27783.