

Vous traiterez la partie C de la première composition de l'épreuve du CAPES 2013 (sur les séries de ENGEL) ainsi que les deux exercices suivants.

Exercice I. On considère le nombre $A = 2015^{2015}$, B la somme des chiffres (décimaux) de A , C la somme des chiffres de B et D la somme des chiffres de C .

1. Donner une majoration du nombre de chiffres décimaux de A (vous pourrez utiliser que $2^3 = 8 \leq 10$, ou bien votre calculatrice en indiquant les calculs effectués). En déduire une majoration de B .
2. Donner une majoration de C puis de D .
3. Démontrer que A, B, C et D sont congrus modulo 9.
4. Calculer le reste de la division euclidienne de A par 9 (on pourra utiliser que $8 \equiv -1 \pmod{9}$).
5. En déduire la valeur de D .

Exercice II. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels entre 0 et 1. Montrer qu'il existe un nombre réel y et une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout entier n , y et $x_{\varphi(n)}$ ont les mêmes n premiers chiffres décimaux. En déduire que la suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y et que $[0; 1]$ est compact. (Vous pourrez construire φ et le développement décimal de y par récurrence sur n .)