Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Préparation au Capes de mathématiques,
Thème : arithmétique

Composition
samedi 23 janvier 2016

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Espe
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Deux heures, documents non-autorisés, calculatrices de poche autorisées Enseignant : T. Coulbois

Exercice I. Clé de contrôle. *(d'après un sujet de la préparation au Capes de Besançon)*
Lors de la saisie de grands nombres N, les erreurs sont fréquentes. Le principe d'une clé de contrôle est d'associer au nombre N un autre nombre K calculé à partir de N et le plus souvent inférieur à 100 (donc peu susceptible d'être l'objet d'erreurs de saisie). On saisit les couples (N, K) et le calcul de K_0, associé au nombre N saisi, permet, s'il est différent de K, de détecter une erreur de saisie. Évidemment, la correspondance entre N et K n'est pas bijective ; une bonne clé est celle qui détecte les erreurs les plus fréquentes : inversion de deux chiffres et erreurs sur un seul chiffre.

Clé d'un numéro ISBN (International Standard Book Number) : Toutes les publications sont identifiées par un numéro à neuf chiffres : $a_1a_2\cdots a_9$ suivi d'une clée comportant un seul caractère. Le numéro ISBN indique la langue de la publication, l'éditeur et le numéro de l'ouvrage dans le registre de l'éditeur. La clé est égale au reste modulo 11 de

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 9a_9.$$

Si ce reste est inférieur à 10, la clé est égale au résultat obtenu, si le reste vaut 10 la clé est le caractère X.

1. Voici les neuf premiers chiffres de quelques numéros ISBN. Déterminer leurs clés. 210242002 ; 204019743 ; 096696563.
2. Voici les clés ISBN d'une commande de livres. Déterminer à quel(s) niveau(x) une erreur de saisie a été commise. 2-04-019832-6 ; 2-13-040610-0 ; 2-90-360757-5.
3. Montrer que si on se trompe sur un seul chiffre d'un numéro ISBN, la clé permet de détecter qu'il y a une erreur.
4. Montrer que si on échange deux chiffres d'un numéro ISBN, la clé permet de détecter qu'il y a une erreur.
5. Proposer une erreur de saisie qui ne sera pas détectée par la clé.

Exercice II. (Interlude) Les polynômes $P(X) = 2X^6 - 6X^5 + 2X^4 - 7X^3 + 18X^2 + 2X - 3$ et $Q(X) = 3X^5 - 10X^4 + 7X^3 - 2X^2 - 5X + 2$ sont ils premiers entre eux ?

Exercice III. Terminator *(d'après un exercice de Dominique* PERRIN*)*
Le but de cet exercice est de trouver un nombre dont l'écriture en base 10 de son cube se termine par les chiffres 2017 (il faut bien être un peu en avance sur son temps).

1. À l'aide d'une congruence, énoncer mathématiquement ce problème.

2. Soit a un nombre premier avec 10000. Nous allons montrer que $a^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$.

a. En distinguant les différentes valeurs possible de a, montrer que $a^4 \equiv 1 \pmod{16}$.

b. Montrer que $a^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

c. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $a^4 = 1 + 5k$.

d. En utilisant la formule du binôme de NEWTON, démontrer qu'il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que

$$a^{500} = 1 + 625k + \binom{125}{2} 25k^2 + \binom{125}{3} 125k^3 + 625k'$$

e. En déduire que $a^{500} \equiv 1 \pmod{625}$.

f. À l'aide des questions précédentes conclure que $a^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$.

3. a. Soit p un nombre premier à 10, montrer qu'il existe des entiers positifs u et v tels que $up = 1 + 500v$.

b. Démontrer que $a^{up} \equiv a \pmod{10000}$.

4. Calcul pratique.

a. pour $p = 3$ trouver u et v.

b. Calculer les quatre derniers chiffres décimaux de 2017^u (vous expliquerez vos calculs).

c. Donner un nombre dont l'écriture décimale du cube se termine par 2017.

d. Trouver un nombre x tel que $x^{153} \equiv 1729 \pmod{10000}$.