

Sage une grosse calculatrice

1 Nombres entiers

```
n.factorial(), n.factor(), n.divisors(), srange(500), sum([1,2,3])
```

1. Calculer $200!$ puis factoriser en nombres premiers.
2. Un nombre est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs (lui-même exclu). Écrire un programme permettant de trouver les nombres parfaits¹ figurant parmi les 500 premiers entiers.

Attention : Sage distingue les entiers de Python (`int`) et ses propres entiers (`sage.rings.integer.Integer`) avec lesquels il sait faire de l'arithmétique : utilisez `srange()` ou `xsrange()` pour votre boucle.

2 Variables et expressions symboliques

```
var('k','n'), sum(k^2,k,1,7), sum(k^2,k,1,n), S.factor(), oo  
p.expand(), p.factor(), p.collect(a), p(a=5), p.coefficient(x,3)
```

3. Calculer $1 + 4 + \dots + n^2$ et $\sum_{k=1}^n k^3$ (vous donnerez la forme factorisée).
4. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
5. Développer $(1+x)^{15}$.
6. Développer $(x^2+ax+b)^5$. Organiser les termes suivant les puissances de a . Remplacer a par 5. Extraire le coefficient en x^3 .

```
solve(...)
```

7. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \\ x^2 + 1/y - 1/z &= 2 \end{cases}$$

1. on connaît beaucoup de nombres parfaits pairs que l'on sait caractériser à partir des nombres premiers de MERSENNE premiers par $2^{n-1}(2^n - 1)$ ssi $2^n - 1$ est premier. Par contre personne ne sait s'il existe des nombres parfaits impairs!

3 Un peu d'analyse

3.1 Courbes et surfaces

`plot(f,x,-10,10), polar_plot(r,theta,0,2*pi), parametric_plot((x,y),t,0,2*pi)`

`plot3d(...), implicit_plot3d(...)`

8. Tracer la courbe représentative de $\frac{\sin(x)}{x}$.
9. Déterminer graphiquement l'asymptote au voisinage de $+\infty$ de la courbe $\frac{\sqrt{x^3 - 2x + 1}}{\sqrt{x - 3}}$.
10. Tracer la cardioïde (epicycloïde à un rebroussement : $r(\theta) = 1 + \cos(\theta)$) et l'astroïde (hypocycloïde à quatre rebroussements, $x(t) = \cos^3(t), y(t) = \sin^3(t)$).
11. Tracer des hyperboloïdes de révolution à une et deux nappes ($z^2 = x^2 + y^2 \pm 1$), tracer un parabolôïde hyperbolique ($z = x^2 - y^2$).
12. Étudier graphiquement la différentiabilité en 0 de $\frac{xy^2}{x^2 + y^2}$.

3.2 Limites et dérivées

`limit(ln(x)/x,x=oo), (sin(x)).series(x=0,6), diff(sin(xy),x,2)`

13. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + x + 5} - 5}{\sqrt{x + 5} - 3}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right) x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x (\cos 2x - \cos x)}$$

14. Vérifier par un calcul de limite l'asymptote trouvée ci-dessus.
15. calculer les développements limités en 0 de

$$\ln(\cos(x)) \text{ à l'ordre } 6, \quad (1+x)^{\frac{1}{1+x}} \text{ à l'ordre } 3$$

16. Donner un équivalent en 0 de $\sin(\tan x) - \tan(\sin x)$
17. Calculer le laplacien de $\ln(x^2 + y^2)$

4 Quelques matrices

`matrix(), determinant(), characteristic_polynomial(), eigenvectors_right(), jordan_form()`

18. Diagonaliser ou trigonaliser les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 18 \\ -8 & -3 & -15 \\ -5 & -1 & -11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 12 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -8 & 12 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -7 & -4 \\ -4 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Vous préciserez les sous-espaces propres et caractéristiques, leurs dimensions, les matrices de passage, etc.

5 Polynômes

```
sage: QX=QQ['x']
sage: x=QX.gen()
sage: x.parent()
sage: p=(x-2)(x+3)
sage: p.parent()
```

19. Pour $n = 1, \dots, 20$ donnez les facteurs irréductibles (sur $\mathbb{Q}$) des polynômes $\Phi_n(X) = X^n - 1$.

20. Vérifier que les racines de $X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1$ sont les racines primitives 15^e de l'unité `p.roots(QQbar)`.

21. Tracer la courbe paramétrique d'équation $\begin{cases} x = 1 - 3t^2 \\ y = t(3 - t^2) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

22. Calculer le résultant $R(x, y)$ des polynômes $x - 1 + 3t^2$ et $y - t(3 - t^2)$: `p.resultant(q,t)`.

Tracer la courbe $R(x, y) = 0$ avec `implicit_plot()`.

23. Tracer la cubique d'équation $3x^3 + 5xy^2 + 5x^2 - 5y^2 = 0$.

24. Pour une pente t , déterminer les coordonnées de l'intersection non-nulle de cette courbe avec la droite d'équation $y = tx$.

25. En déduire une paramétrisation de cette cubique.