

Vous apporterez un grand soin à la rédaction

Enseignants : T. Coulbois, L. Paoluzzi, G. Rond

Exercice I. 1. Donner un exemple de fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ mais qui dont la dérivée seconde n'est pas continue en 0.

2. Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ qui admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions, mais qui n'est pas continue.

Dans les deux questions précédentes vous justifierez vos affirmations

Exercice II. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est bijective.

2. Calculer $f([-3, 1[)$, $f^{-1}([-3; 2])$, $f^{-1}(f([1; +\infty[))$.

3. l'équivalence $x < y \iff \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ est-elle vraie? Justifier.

Exercice III. Pour chacune des affirmations suivantes donner une démonstration ou un contreexemple.

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, A et B des parties de E et C et D des parties de F .

2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

3. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

4. $f(A) \subseteq f(B) \Rightarrow A \subseteq B$

5. $f(f^{-1}(C)) = C$

6. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

7. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

8. Si f est injective, démontrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice IV.

1. Rappeler la définition d'un majorant d'une partie $A \subset \mathbb{R}$. Donner un exemple d'une partie A de $\mathbb{R}$ qui n'a pas de majorant.

2. Rappeler la définition de la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie $E \subset \mathbb{R}$.

3. Rappeler la définition du maximum (resp. minimum) d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$. Donner un exemple d'un ensemble majoré qui n'a pas de maximum.

4. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad a \leq b.$$

Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Démontrer que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y).$$