Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie et analyse

Deuxième Devoir à la maison
À rendre mardi 9 décembre 2015

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Vous apporterez un grand soin à la rédaction

Enseignants : T. Coulbois, L. Paoluzzi

Exercice I. On considère l'application suivante :

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$d((x,y),(x',y')) = \begin{cases} |y-y'| & x = x' \\ |x-x'| + |y| + |y'| & x \neq x' \end{cases}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$. La distance d est-elle induite par une norme ?
2. Déterminer et dessiner les (quatre) boules de rayon $1/2$ et 1 et centre $(0,0)$ et $(0,1/2)$.
3. On considère la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de points de $\mathbb{R}^2$, où $P_n = (1/n, 1)$. Pour tous $n > m \geq 1$ calculer $d(P_n, P_m)$. En déduire les valeurs d'adhérence de la suite.
4. Soit $\mathcal{Q} = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{Q}$ on a $d(A,B) \leq 3$.
5. Pour tous $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ avec $y_0 \geq 0$ montrer que les ensembles suivants sont ouverts : $D(x_0, > y_0) = \{(x_0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > y_0\}$, $D(x_0, < -y_0) = \{(x_0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -y_0\}$, $P(> x_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > x_0\}$, $P(< x_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < x_0\}$. En déduire que $\mathcal{Q}$ est fermé.
6. En justifiant votre réponse dire si $\mathcal{Q}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ muni de la distance d.
7. Soient f et g les translations de $\mathbb{R}^2$ de vecteur $(1,0)$ et $(0,1)$ respectivement. Montrer que, par rapport à la distance d, f est une isométrie (et donc elle est continue) alors que g n'est pas continue.
8. Montrer que l'application identité définie sur $\mathbb{R}^2$ avec la distance euclidienne et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ avec la distance d n'est pas continue. Que peut-on dire de son application réciproque ?

Exercice II. On considère l'espace vectoriel E des suites de nombres réels et ses sous espaces :
– ℓ^∞ des suites bornées ;
– ℓ^1 des suites dont la série est absolument convergente ;
– ℓ^2 des suites dont la série des carrés est convergente.
1. Démontrer les inclusions : $\ell^1 \subseteq \ell^2 \subseteq \ell^\infty$.
2. Démontrer que les inclusions ci-dessus sont strictes.
Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E, on définit

$$\|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|, \quad \|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \text{ et } \|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} {u_n}^2},$$

ces quantités pouvant être égales à $+\infty$.
3. Démontrer que pour $p = 1, 2, \infty$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur l'espace vectoriel ℓ^p. On appelle désormais ℓ^p cet espace vectoriel muni la norme $\|\cdot\|_p$.
4. Démontrer que les restrictions de ces trois normes à ℓ^1 ne sont pas équivalentes.
5. Démontrer que l'ensemble des suites convergeant vers 0 est un sous-espace vectoriel fermé de ℓ^∞.
6. Démontrer que l'application :

$$S : \begin{array}{ccc} \ell^1 & \to & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array},$$

est une forme linéaire continue.
7. Démontrer que les trois espaces $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$, $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ et $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ sont complets.
8. Démontrer que la boule unité fermée $B_f(0,1) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 1\}$ de l'espace ℓ^∞ n'est pas compacte.