Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie

Examen
8 janvier 2016

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Trois heures, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : T. Coulbois, L. Paoluzzi, G. Rond

Exercice I. (Questions de cours).
1. Qu'est-ce qu'un ouvert d'un espace métrique ? Qu'est-ce qu'un fermé ? Donner un exemple d'une partie qui n'est ni ouverte ni fermée, donner un exemple d'un ouvert-fermé.
2. Démontrer qu'une intersection finie d'ouverts est ouverte. Donner un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas ouverte.
3. Démontrer que l'image d'un compact par une application continue est compacte.

Exercice II. Soient A et B des parties d'un espace métrique (E,d).
1. Montrer que l'intérieur de $A\cap B$ est égal à $\mathring{A}\cap\mathring{B}$.

$\mathring{A}$ et $\mathring{B}$ sont des ouverts leur intersection $\mathring{A}\cap\mathring{B}$ est donc ouverte. $\mathring{A}$ est inclus dans A et $\mathring{B}$ est inclus dans B donc l'intersection est incluse dans $A\cap B$. Nous en déduisons que $\mathring{A}\cap\mathring{B}$ est un ouvert inclus dans $A\cap B$. L'intérieur étant le plus grand ouvert inclus dans $A\cap B$, nous avons démontré que $\mathring{A}\cap\mathring{B}\subseteq\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$.
Réciproquement, l'intérieur $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$ est un ouvert inclus dans $A\cap B$, donc dans A. Il est donc inclus dans le plus grand ouvert inclus dans A : $\mathring{A}$. Symétriquement $\mathring{A}\cap\mathring{B}$ est inclus dans $\mathring{B}$.
Ce qui démontre que $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$ est inclus dans $\mathring{A}\cap\mathring{B}$.
Nous concluons, grâce à cette double inclusion que $\mathring{A}\cap\mathring{B}=\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$.

2. Montrer que $\mathring{A}\cup\mathring{B}$ est inclus dans l'intérieur de $A\cup B$.

$\mathring{A}$ et $\mathring{B}$ sont des ouverts donc leur réunion est ouverte. De plus $\mathring{A}$ est inclus dans A et $\mathring{B}$ est inclus dans B donc $\mathring{A}\cup\mathring{B}$ est inclus dans $A\cup B$. Comme l'intérieur de $A\cup B$ est le plus grand ouvert inclus dans $A\cup B$, nous en concluons que $\mathring{A}\cup\mathring{B}$ est inclus dans l'intérieur de $A\cup B$.

3. Donner un exemple où la dernière inclusion est stricte.

Dans $\mathbb{R}$ prenons $A=[0;1]$ et $B=[1;2]$, alors $\mathring{A}=]0;1[$, $\mathring{B}=]1;2[$, $A\cup B=[0;2]$, $\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}=]0;2[$ et $\mathring{A}\cup\mathring{B}=]0;1[\cup]1;2[$. Ainsi $\mathring{A}\cup\mathring{B}\subseteq\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$.

Exercice III. Soit A un ensemble non vide. Une fonction $f : A\longrightarrow\mathbb{R}$ est dite bornée sur A s'il existe un réel $M\geq 0$ telq ue

$$\forall x\in A,\quad |f(x)|\leq M.$$

Notons $\ell^\infty(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de A dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans $\ell^\infty(A,\mathbb{R})$ on pose

$$d(f,g)=\sup_{x\in A}|f(x)-g(x)|.$$

1. Montrer que d est une distance sur $\ell^\infty(A,\mathbb{R})$.

D'abord, $\{|f(x)| \mid x \in A\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}^+$, elle admet donc une borne supérieure qui est un réel positif.
Nous vérifions facilement que d est symétrique : pour f et g dans $\ell^\infty(A,\mathbb{R})$, et pour tout $x \in A$, $|f(x)-g(x)| = |g(x)-f(x)|$ donc

$$d(f,g) = \sup_{x\in A}|f(x)-g(x)| = \sup_{x\in A}|g(x)-f(x)| = d(g,f).$$

Ensuite la borne supérieure étant un majorant, pour deux fonctions $f,g \in \ell^\infty(A,\mathbb{R})$, $d(f,g) = 0$ si, et seulement si, pour tout $x \in A$, $|f(x)-g(x)| \leq 0$, c'est-à-dire si pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, ce qui est la définition de $f = g$.
Finalement, nous devons vérifier l'inégalité triangulaire. Soient, f, g et h trois fonctions de $\ell^\infty(A,\mathbb{R})$. La borne supérieure étant le plus petit des majorants, pour tout $\epsilon > 0$, $d(f,g)-\epsilon$ n'est pas un majorant donc il existe $x \in A$ tel que $|f(x)-g(x)| > d(f,g)-\epsilon$. D'après l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue dans $\mathbb{R}$, $|f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$. Les deux bornes supérieures étant des majorants nous obtenons $|f(x)-g(x)| \leq d(f,h)+d(h,g)$. En combinant les deux inégalités obtenues précédemment : $d(f,g)-\epsilon < d(f,h)+d(h,g)$. Nous avons démontré cette inégalité pour tout $\epsilon > 0$ et donc $d(f,g) \leq d(f,h)+d(h,g)$ ce qui est l'inégalité triangulaire pour d.
Nous avons donc démontré que d est une distance sur $\ell^\infty(A,\mathbb{R})$.

Dans ce qui suit, on considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est de Cauchy dans $\ell^\infty(A,\mathbb{R})$.

2. Montrer qu'il existe un réel C tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in A$ on ait $|f_n(x)| \leq C$.

Par définition d'une suite de CAUCHY, pour $\epsilon = 1 > 0$, il existe N tel que pour tout $p,q \geq N$, $d(f_p,f_q) \leq 1$. En particulier pour $p = N$, pour tout $q \geq N$, $d(f_N,f_q) \leq 1$. La fonction f_N est bornée, soit donc M un majorant de sa valeur absolue : $\forall x \in A$, $|f_N(x)| \leq M$. Par définition de la distance d et comme la borne supérieure est un majorant : $\forall x \in A$, $|f_N(x)-f_q(x)| \leq 1$. En utilisant l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue dans $\mathbb{R}$,

$$\forall q \geq N, \forall x \in A,\ \ |f_q(x)| \leq |f_N(x)|+1 \leq M+1.$$

Les fonctions f_0, $f_1,\dots,f_{N-1}$, sont toutes bornées, pour chaque $k = 0,\dots,N-1$, soit M_k un majorant de $|f_k|$. Enfin soit $C = \max(M_0,\dots,M_{N-1},M+1)$. Alors nous avons démontré (en distinguant le cas $n < N$ et le cas $n \geq N$) que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in A$, $|f_n(x)| \leq C$.

3. Fixons $a \in A$. Montrer que la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$.

Soit $\epsilon > 0$, par définition de la propriété de CAUCHY, il existe N, tel que pour tout $p,q \geq N$, $d(f_p,f_q) \leq \epsilon$. Comme la borne supérieure est un majorant, nous en déduisons que $|f_p(a)-f_q(a)| \leq d(f_p,f_q) \leq \epsilon$. Ce qui démontre que la suite de nombres réels, $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété de CAUCHY. Comme $\mathbb{R}$ est complet cette suite converge vers une limite que nous appelons $f(a)$.

4. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans l'espace métrique $(\ell^\infty(A,\mathbb{R}),d)$.

À la question précédente, nous avons construit une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ qui est la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous allons démontrer que cette limite est une convergence au sens de la distance d. Tout d'abord d'après les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \in A$, $|f_n(a)| \leq C$ et comme $[-C;C]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, il contient aussi la limite $f(a)$ de la suite de nombres réels $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$. Ce qui démontre que la fonction f est bornée (par C) et qu'elle est donc un élément de $\ell^\infty(A,\mathbb{R})$.
Par définition d'une suite de CAUCHY, pour tout $\epsilon > 0$, il existe N, tel que pour tout $p,q \geq N$, $d(f_p,f_q) < \epsilon$. Alors pour tout $x \in A$, $|f_p(x)-f_q(x)| < \epsilon$. En faisant tendre q vers $+\infty$, nous obtenons que $|f_p(x)-f(x)| < \epsilon$ et donc en passant à la borne supérieure, $d(f_p,f) \leq \epsilon$. Ce qui démontre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(\ell^\infty(A,\mathbb{R}),d)$ vers la fonction f.

5. Que peut-on en déduire pour l'espace métrique $\ell^\infty(A,\mathbb{R}),d)$?

Nous avons démontré aux trois questions précédentes que toute suite de CAUCHY $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de l'espace $(\ell^\infty(A,\mathbb{R}),d)$ est convergente. L'espace $(\ell^\infty(A,\mathbb{R}),d)$ est donc complet.

Exercice IV. Soit $E = \mathbb{C}[z]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes en une variable. Pour tout $f = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k \in E$ on pose :

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{d} |a_k|.$$

1. Montrer que $\| \ \|$ définit une norme sur E.

Soit $f = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k$ un polynôme de E, alors

$$\|f\| = 0 \iff \sum_{k=0}^{d} |a_k| \iff a_0 = a_1 = \cdots = a_d = 0 \iff f = 0.$$

Soit de plus λ un nombre complexe. Alors

$$\|\lambda f\| = \|\sum_{k=0}^{d} \lambda a_k z^k\| = \sum_{k=0}^{d} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^{d} |a_k| = \lambda \|f\|.$$

Soit enfin $g = \sum_{k=0}^{d'} b_k z^k$ un autre polynôme de E. Alors

$$\|f+g\| = \sum_{k=0}^{\delta} |a_k + b_k|,$$

avec $\delta = \max(d, d')$ et la convention que $a_k = 0$ pour $k > d$ et $b_k = 0$ pour $k > d'$. D'après l'inégalité triangulaire pour le module des nombres complexes, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$ et donc en sommant

$$\|f+g\| \leq \sum_{k=0}^{\delta} |a_k| + |b_k| = \sum_{k=0}^{\delta} |a_k| + \sum_{k=0}^{\delta} |b_k| = \|f\| + \|g\|.$$

Ces trois propriétés montrent que $\| \cdot \|$ est une norme sur E.

2. Prouver que $B'(0,1) = \{f \in E \mid \|f\| \leq 1\}$ n'est pas compact (considérer les z^n pour $n \in \mathbb{N}$.)

Soit P un polynôme de E et soit d son degré. Alors pour $n > d$, le polynôme $z^n - P(z)$ est de degré n et de coefficient dominant z^n. Nous pouvons donc calculer $\|z^n - P(z)\| \geq 1$. Nous en déduisons que P n'est pas une valeur d'adhérence de la suite de polynômes $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ce pour aucun polynôme P. Nous en déduisons que la suite n'a pas de valeur d'adhérence dans E et donc que $B'(0,1)$ n'est pas compact.

Exercice V. Dans $\mathbb{R}^2$ note $O = (0,0)$ l'origine, $P = (1,0)$ et

$$\Delta_n = \{(x,y) \mid y = \frac{x}{n}, x > 0\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = \{O\} \cup \{P\} \cup \left(\bigcup_{n\geq 1} \Delta_n\right)$. Le but de cet exercice est de montrer que A est connexe mais pas connexe par arcs.

1. Représenter par un dessin A dans $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $f : A \longmapsto \{0,1\}$ une fonction continue.

a. Montrer que $\{O\} \cup (\bigcup_{n\geq 1} \Delta_n)$ est connexe. En déduire que f est constante sur $\{O\} \cup (\bigcup_{n\geq 1} \Delta_n)$.

Pour chaque $n > 0$, l'adhérence $\bar{\Delta}_n$ de la demi-droite ouverte Δ_n est la demi-droite fermée $\{O\} \cup \Delta_n$ qui est connexe. Le point O est commun à toutes ces demi-droites fermées, leur réunion est donc connexe. La fonction f est continue, l'image du connexe $\{O\} \cup (\bigcup_{n\geq 1} \Delta_n)$ est donc connexe, c'est donc soit $\{0\}$, soit $\{1\}$. Dans les deux cas la fonction f est constante sur $\{O\} \cup (\bigcup_{n\geq 1} \Delta_n)$.

b. Trouver une suite de points de $\bigcup_{n\geq 1} \Delta_n$ qui converge vers P. Montrer que f est constante sur A.

Pour $n > 0$ le point $P_n = (1, \frac{1}{n})$ est un point de Δ_n. Et bien sûr, la suite de points $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers P. Comme f est continue et que la suite de nombres réels $(f(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante d'après la question précédente, en passant à la limite $f(P)$ est égal à la valeur (constante) de f sur $\{O\} \cup (\bigcup_{n\geq 1} \Delta_n)$. Nous en déduidsons que f est constante sur A.

c. Montrer que si U, V est une disconnexion de A, alors la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x \in U$ et $f(x) = 1$ si $x \in V$ est continue. Conclure.

L'ensemble $\{0; 1\}$ possède quatre ouverts : $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0; 1\}$. Chacun de ces quatre ouverts a une image réciproque ouverte (respectivement, $\emptyset$, U, V et A), donc f est continue.
Nous avons ainsi démontré à la question précédente que toute fonction continue définie sur A et à valeur dans $\{0; 1\}$ est constante. Ce qui démontre pour toute disconnexion U, V de A : $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$. Toute disconnexion de A est triviale, donc A est connexe.

3. Pour montrer que A n'est pas connexe par arcs on raisonne par l'absurde : on supppose qu'il existe $\gamma : [0, 1] \longrightarrow A$ continue telle que $\gamma(0) = O$ et $\gamma(1) = P$. Pour tout $t \in [0, 1]$ on note $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

a. Montrer que $T_0 = \{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) = O\}$ est compact et non vide. On pose $t_0 = \sup T_0$. Montrer que $x(t_0) = 0$ et que $t_0 < 1$.

Comme γ est continue et que le singleton $\{O\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, $T_0 = \gamma^{-1}(\{O\})$ est un fermé de $[0; 1]$. Comme $[0; 1]$ est compact, T_0 est compact. Bien sûr, $0 \in T_0$ qui n'est donc pas vide. Pour tout $\epsilon > 0$, par continuité de γ en t_0, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $t \in [0; 1]$, $|t - t_0| < \eta \Rightarrow d(\gamma(t), \gamma(t_0)) < \epsilon$. Comme la borne supérieure est le plus petit des majorants, $t_0 - \eta$ n'est pas un majorant, donc il existe $t \in T_0$ tel que $t_0 - \eta < t < t_0$. Alors par définition de T_0, $\gamma(t) = O$. et $|\gamma(t_0)| < \epsilon$. Comme cette inégalité est vraie pour tout $\epsilon > 0$, nous ne déduisons que $\gamma(t_0) = O$. Ainsi $x(t_0) = 0$ et comme $\gamma(1) = P \neq O$, $t_0 < 1$.

b. Montrer que $T_1 = \{t \in [t_0, 1] \mid \gamma(t) = P\}$ est compact et non vide. On pose $t_1 = \inf T_1$. Montrer que $x(t_1) = 1$, $y(t_1) = 0$ et $t_0 < t_1$.

De même $\gamma^{-1}(\{P\})$ est un fermé et donc $T_1 = \gamma^{-1}(\{P\}) \cap [t_0; 1]$ est compact. De plus $1 \in T_1$ qui est non vide. De même que précédemment $\gamma(t_1) = P$ et donc $y(t_1) = 0$ et $t_0 < t_1$.

c. Vérifier que pour tout $t \in]t_0, t_1[$, $\gamma(t) \in \bigcup_{n\geq 1} \Delta_n$ et montrer que

$$\phi : t \longmapsto \frac{x(t)}{y(t)}$$

est bien définie sur $]t_0, t_1[$.

Comme la borne supérieure est un majorant pour tout $t > t_0$, $\gamma(t) \neq O$, et comme la borne inférieure est un minorant pour tout $t < t_1$, $\gamma(t) \neq P$. Ce qui démontre que $\forall t \in]t_0; t_1[$, $\gamma(t) \in \bigcup_{n\geq 1} \Delta_n$. Par définition des demi-droites ouvertes Δ_n, nous avons démontré que pour tout $t \in]t_0; t_1[$, $y(t) \neq 0$ et donc $\frac{x(t)}{y(t)}$ est bien défini.

d. Montrer que ϕ est constante sur $]t_0, t_1[$.

La fonction ϕ est le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas elle est donc continue sur $]t_0; t_1[$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout point $P = (x, y)$ de Δ_n, $\frac{x}{y} = n$. La question précédente entraine donc que pour tout $t \in]t_0; t_1[$, $\phi(t) \in \mathbb{N}^*$. Comme ϕ est une fonction continue et que $]t_0; t_1[$ est connexe son image est connexe. Comme son image est incluse dans $\mathbb{N}^*$, nous concluons que ϕ est constante sur $]t_0; t_1[$.

e. En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall t \in]t_0, t_1[$, $x(t) = Ny(t)$, et que cette égalité est encore vraie sur $[t_0, t_1]$.

D'après la question précédente il exite $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall t \in]t_0, t_1[$, $\phi(t) = N$, c'est-à-dire $x(t) = Ny(t)$. Les fonctions x et y sont continues donc cette égalité passe aux limites : $x(t_0) = Ny(t_0)$ et $x(t_1) = Ny(t_1)$.

f. Obtenir une contradiction et conclure.

D'après les questions précédentes nous obtenons que $x(t_1) = Ny(t_1) = N \cdot 0 = 0$, donc que $\gamma(t_1) = O$ ce qui est une contradiction.
Nous avons donc démonté qu'il n'existe pas de chemin allant de O à P et donc A n'est pas connexe par arc, alors qu'il est connexe.