Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie

Examen 2e session

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Trois heures, ni calculatrices, ni documents Enseignant-es : T. Coulbois, L. Paoluzzi, G. Rond

Exercice I.
1. Soit $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0\}$. Pour un point $A = (x_0, y_0, z_0)$ de U, trouver $r > 0$ tel que la boule de centre A et de rayon r soit incluse dans U.
2. Soient (E, d) un espace métrique et A et B deux parties de E. Montrer que $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est égal à l'intérieur de $A \cap B$.
3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique (E, d). Montrer que si la suite possède une sous-suite convergente alors elle est convergente.
4. Soit (E, d) un espace métrique. Si E est compact alors E est-il complet ? Justifier. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.
5. Soient C_1 et C_2 deux parties connexes d'un espace métrique (E, d). Montrer que si $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ alors $C_1 \cup C_2$ est connexe.

Exercice II. Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E, d). Le diamètre de A est défini par :

$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{a,a'\in A} d(a, a').$$

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes (sous ces conditions, on dit que A est bornée) :

i) $\exists x \in E,\ \exists r > 0 : A \subset B(x, r)$
ii) $\forall x \in E, \exists r > 0 : A \subset B(x, r)$
iii) $\exists C > 0 : \operatorname{diam}(A) \leq C$

2. Montrer que si $A \neq \emptyset$ est une partie bornée alors $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.
3. a. Montrer que si A et B sont deux parties non vides bornées alors $A\cup B$ est bornée.
b. Donner une majoration de $\operatorname{diam}(A \cup B)$ en fonction de

$$\operatorname{diam}(A),\ \operatorname{diam}(B) \text{ et } d(A, B) := \inf_{a\in A,b\in B} d(a, b).$$

Exercice III. Soit L l'ensemble des fontions lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que l'application

$$N : f \mapsto N(f) := |f(0)| + \sup_{0\leq x<y\leq 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

est bien définie sur L et qu'elle y définit une norme.
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in L$:

$$\|f\|_\infty \leq C\, N(f).$$

3. Existe-t-il une constante $C' > 0$ telle que pour tout $f \in L$:

$$N(f) \leq C'\, \|f\|_\infty\ ?$$

Conclure.