Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie

Examen
8 janvier 2016

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Trois heures, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : T. Coulbois, L. Paoluzzi, G. Rond

Exercice I. **(Questions de cours)**.

1. Qu'est-ce qu'un ouvert d'un espace métrique ? Qu'est-ce qu'un fermé ? Donner un exemple d'une partie qui n'est ni ouverte ni fermée, donner un exemple d'un ouvert-fermé.

2. Démontrer qu'une intersection finie d'ouverts est ouverte. Donner un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas ouverte.

3. Démontrer que l'image d'un compact par une application continue est compacte.

Exercice II. Soient A et B des parties d'un espace métrique (E, d).

1. Montrer que l'intérieur de $A \cap B$ est égal à $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.

2. Montrer que $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ est inclus dans l'intérieur de $A \cup B$.

3. Donner un exemple où la dernière inclusion est stricte.

Exercice III. Soit A un ensemble non vide. Une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite bornée sur A s'il existe un réel $M \geq 0$ telq ue

$$\forall x \in A, \ |f(x)| \leq M.$$

Notons $\ell^\infty(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de A dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans $\ell^\infty(A, \mathbb{R})$ on pose

$$d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

1. Montrer que d est une distance sur $\ell^\infty(A, \mathbb{R})$.

Dans ce qui suit, on considère une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est de Cauchy dans $\ell^\infty(A, \mathbb{R})$.

2. Montrer qu'il existe un réel C tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in A$ on ait $|f_n(x)| \leq C$.

3. Fixons $a \in A$. Montrer que la suite $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$.

4. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans l'espace métrique $(\ell^\infty(A, \mathbb{R}), d)$.

5. Que peut-on en déduire pour l'espace métrique $(\ell^\infty(A, \mathbb{R}), d)$?

Exercice IV. Soit $E = \mathbb{C}[z]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes en une variable. Pour tout $f(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k \in E$ on pose :

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{d} |a_k|.$$

1. Montrer que $\| \ \|$ définit une norme sur E.

2. Prouver que $B'(0, 1) = \{f \in E \mid \|f\| \leq 1\}$ n'est pas compact (considérer les z^n pour $n \in \mathbb{N}$.)

Exercice V. Dans $\mathbb{R}^2$ note $O=(0,0)$ l'origine, $P=(1,0)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\Delta_n = \{(x,y) \mid y = \frac{x}{n}, x>0\}.$$

On note $A=\{O\}\cup\{P\}\cup\left(\bigcup_{n\geq 1}\Delta_n\right)$. Le but de cet exercice est de montrer que A est connexe mais pas connexe par arcs.

1. Représenter par un dessin A dans $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $f : A \longmapsto \{0,1\}$ une fonction continue.
a. Montrer que $\{O\}\cup\left(\bigcup_{n\geq 1}\Delta_n\right)$ est connexe. En déduire que f est constante sur $\{O\}\cup\left(\bigcup_{n\geq 1}\Delta_n\right)$.
b. Trouver une suite de points de $\bigcup_{n\geq 1}\Delta_n$ qui converge vers P. Montrer que f est constante sur A.
c. Montrer que si U,V est une disconnexion de A, alors la fonction f définie par $f(x)=0$ si $x\in U$ et $f(x)=1$ si $x\in V$ est continue. Conclure.

3. Pour montrer que A n'est pas connexe par arcs on raisonne par l'absurde : on supppose qu'il existe $\gamma : [0,1] \longrightarrow A$ continue telle que $\gamma(0)=O$ et $\gamma(1)=P$. Pour tout $t\in[0,1]$ on note $\gamma(t)=(x(t),y(t))$.
a. Montrer que $T_0=\{t\in[0,1] \mid \gamma(t)=O\}$ est compact et non vide. On pose $t_0=\sup T_0$. Montrer que $x(t_0)=0$ et que $t_0<1$.
b. Montrer que $T_1=\{t\in[t_0,1] \mid \gamma(t)=P\}$ est compact et non vide. On pose $t_1=\inf T_1$. Montrer que $x(t_1)=1$, $y(t_1)=0$ et $t_0<t_1$.
c. Vérifier que pour tout $t\in]t_0,t_1[$, $\gamma(t)\in\bigcup_{n\geq 1}\Delta_n$ et montrer que

$$\phi : t \longmapsto \frac{x(t)}{y(t)}$$

est bien définie sur $]t_0,t_1[$.
d. Montrer que ϕ est constante sur $]t_0,t_1[$.
e. En déduire qu'il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall t\in]t_0,t_1[$, $x(t)=Ny(t)$, et que cette égalité est encore vraie sur $[t_0,t_1]$.
f. Obtenir une contradiction et conclure.