

Exercice I. Cours. Soit (E, d) un espace métrique.

1. Donner la définition d'un ouvert de E .
2. Pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E rappeler ce que signifie que cette suite converge vers $x \in E$.
3. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Exercice II. 1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $\|(x, y)\| = \max(|x + y|, |x - 2y|)$.

a. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Nous remarquons d'abord que l'application proposée est bien une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$. Vérifions les axiomes des normes.

Séparation : Pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \|(x, y)\| = 0 &\iff \max(|x + y|, |x - 2y|) = 0 \iff (|x + y| = 0 \text{ et } |x - 2y| = 0) \\ &\iff x + y = x - 2y = 0. \end{aligned}$$

De ces deux équations nous obtenons facilement $x = y = 0$.

Homogénéité : Pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \|\lambda(x, y)\| &= \|(\lambda x, \lambda y)\| = \max(|\lambda x + \lambda y|, |\lambda x - 2\lambda y|) = \max(|\lambda| \cdot |x + y|, |\lambda| \cdot |x - 2y|) \\ &= |\lambda| \max(|x + y|, |x - 2y|) = |\lambda| \cdot \|(x, y)\|. \end{aligned}$$

Inégalité triangulaire : Pour tous (x, y) et (x', y') dans $\mathbb{R}^2$,

$$\|(x, y) + (x', y')\| = \|(x + x', y + y')\| = \max(|x + x' + y + y'|, |x + x' - 2(y + y')|)$$

D'après l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue dans $\mathbb{R}$: $|x + x' + y + y'| \leq |x + y| + |x' + y'|$ et $|x + x' - 2(y + y')| \leq |x - 2y| + |x' - 2y'|$. Le maximum étant un majorant, nous avons

$|x + y| \leq \max(|x + y|, |x - 2y|) = \|(x, y)\|$ et $|x' + y'| \leq \max(|x' + y'|, |x' - 2y'|) = \|(x', y')\|$
et donc

$$|x + x' + y + y'| \leq \|(x, y)\| + \|(x', y')\|.$$

De même nous montrerions que

$$|x + x' - 2(y + y')| \leq \|(x, y)\| + \|(x', y')\|.$$

Le maximum étant le plus petit des majorants nous déduisons de ces deux inégalités :

$$\max(|x + x' + y + y'|, |x + x' - 2(y + y')|) \leq \|(x, y)\| + \|(x', y')\|,$$

c'est à dire

$$\|(x, y) + (x', y')\| \leq \|(x, y)\| + \|(x', y')\|.$$

Ce qui conclue notre démonstration du fait que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b. Dessiner sa boule unité.

Les points (x, y) de la boule unité vérifient $\|(x, y)\| < 1$ et donc $|x+y| < 1$ et $|x-2y| < 1$. Sans les valeurs absolues nous obtenons : $y < 1-x$, $y > -1-x$, $y < \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$ et $y > -\frac{1}{2} - \frac{x}{2}$. En traçant ces quatre droites et les quatre demi-plans ainsi définis nous obtenons la boule unité. (*Je n'ai pas le courage d'inclure une figure dans ce corrigé*)

2. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$ et notons respectivement par B_1 et B_2 leurs boules unités. Montrer que

$$B_1 \subseteq B_2 \iff \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

$\Leftarrow$: Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Soit alors un point $x \in B_1$. Par définition de la boule unité $\|x\|_1 < 1$. Et d'après notre hypothèse $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 < 1$ et donc $x \in B_2$. Nous avons donc démontré que $B_1 \subseteq B_2$.

$\Rightarrow$: Supposons que $B_1 \subseteq B_2$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Si $x = 0$ alors les deux normes sont nulles et $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Sinon pour $\epsilon > 0$ considérons $x' = \frac{x}{\|x\|_1 + \epsilon}$. Alors par linéarité de la norme : $\|x'\|_1 = \|\frac{x}{\|x\|_1 + \epsilon}\|_1 = \frac{\|x\|_1}{\|x\|_1 + \epsilon} < 1$. Ce qui démontre que $x' \in B_1$ et donc d'après notre hypothèse $x' \in B_2$ ce qui signifie que $1 > \|x'\|_2 = \|\frac{x}{\|x\|_1 + \epsilon}\|_2 = \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1 + \epsilon}$ (par linéarité de la norme $\|\cdot\|_2$). Nous obtenons donc que pour tout $\epsilon > 0$, $\|x\|_2 < \|x\|_1 + \epsilon$. Ce qui implique, en faisant tendre ϵ vers 0, que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

Exercice III. Soit (E, d) un espace métrique. Pour une partie A de E on définit le *diamètre* de A par :

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

1. a. Quel est le diamètre de $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}$ et $1 - \frac{1}{n}$ sont dans $A_0 =]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. Donc par définition $\text{diam}(A_0) \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{2}{n}$. Comme cette inégalité est vraie pour tout les $n \in \mathbb{N}^*$, nous en déduisons que $\text{diam}(A_0) \geq 1$.

Pour tous nombres $x, y \in A_0$, $\|x - y\| \leq \max(x, y) < 1$ et comme la borne supérieure est le plus petit des majorants $\text{diam}(A_0) \leq 1$.

Nous avons ainsi démontré que $\text{diam}(]0, 1[\cap \mathbb{Q}) = 1$.

b. Celui de $[0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$?

De même qu'à la question précédente en considérant $\frac{\sqrt{2}}{n}$ et $1 - \frac{\sqrt{2}}{n}$ qui sont deux éléments de $A_1 = [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ nous montrons que $\text{diam}([0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = 1$.

2. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. Si $\text{diam}(A) = \text{diam}(B)$ est-ce que $A = B$? Justifier.

Non. Considérons les parties finies $A = \{0, 2\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$ alors $\text{diam}(A) = \text{diam}(B) = 2$ alors que $A \subsetneq B$.