Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie

Partiel 1
Mardi 13 octobre 2015

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Une heure, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : T. Coulbois, L. Paoluzzi, G. Rond

Exercice I. Cours. Soit (E, d) un espace métrique.

1. Donner la définition d'un ouvert de E.

2. Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E rappeler ce que signifie que cette suite converge vers $x \in E$.

3. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Exercice II. **1.** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $\|(x, y)\| = \max(|x + y|, |x - 2y|)$.

a. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b. Dessiner sa boule unité.

2. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$ et notons respectivement par B_1 et B_2 leurs boules unitées. Montrer que

$$B_1 \subseteq B_2 \iff \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Exercice III. Soit (E, d) un espace métrique. Pour une partie A de E on définit le *diamètre* de A par :

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \ / \ x, y \in A\}.$$

1. **a.** Quel est le diamètre de $]0, 1[\cap\mathbb{Q}$?

b. Celui de $[0, 1] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$?

2. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. Si $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(B)$ est-ce que $A = B$? Justifier.