

Exercice I. Cours.

1. Qu'est-ce qu'un fermé dans un espace métrique ?
2. Démontrer qu'un fermé dans un compact est compact.
3. Démontrer que l'image continue d'un compact est compacte.

Exercice II. 1. Donner un exemple d'une union de fermés qui n'est pas fermée.

$]0; 1] = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} [\frac{1}{n}; 1]$ est une union (infinie) de fermés de $\mathbb{R}$ qui n'est pas fermée.

2. Donner un exemple d'une application continue f et d'un fermé F dont l'image $f(F)$ n'est pas fermée.

$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, $\mathbb{R}$ est fermé et l'image de la fonction $\arctan$ est $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ qui n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

3. Donner un exemple d'une application continue f et d'un compact K dont l'image réciproque $f^{-1}(K)$ n'est pas compacte.

L'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$. L'image réciproque du compact $[0; 1]$ est $[1; +\infty[$ qui n'est pas compact.

4. Donner un exemple d'une application continue f et d'une partie A telles que

$$f^{-1}(\bar{A}) \neq \overline{f^{-1}(A)}.$$

Soit $A =]0; +\infty[$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2(x-1)$. Bien sûr, f est continue. De plus $\bar{A} = [0; +\infty[$. Un tableau de signe montre que $f^{-1}(\bar{A}) = \overline{f^{-1}(A)} = \overline{f^{-1}([0; +\infty[)} = \{0\} \cup [1; +\infty[$. Alors que $f^{-1}(A) = f^{-1}([0; +\infty[) =]1; +\infty[$ et donc $\overline{f^{-1}(A)} = [1; +\infty[$.

Exercice III. (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, soit $f : E \rightarrow E'$ une application continue et soit A une partie de E . Montrer que

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Soit $y \in f(\bar{A})$, alors il existe $x \in \bar{A}$ tel que $y = f(x)$. Par définition de l'adhérence, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers x . Comme f est continue sur E , donc au point x , la suite des images $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E' vers $y = f(x)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \in f(A)$ donc la limite, y , appartient à l'adhérence $\overline{f(A)}$. Nous avons ainsi démontré que $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Exercice IV. Soit (E, d) un espace métrique. Un **point isolé** x d'une partie A de E est un point $x \in A$ tel qu'il existe $r > 0$ avec $B(x, r) \cap A = \{x\}$. On désigne par A' l'ensemble des points de A qui ne sont pas isolés.

1. a. Démontrer que $\mathbb{Q}$ n'a pas de points isolés.

En effet, soit $x \in \mathbb{Q}$ et $r > 0$. Alors la boule $B(x, r) =]x-r; x+r[$ est un intervalle ouvert non-trivial de $\mathbb{R}$ qui contient une infinité de nombres rationnels : $B(x, r) \cap \mathbb{Q} \neq \{x\}$. Par exemple le nombre $\epsilon = 1/(\lfloor 1/r \rfloor + 1)$ est rationnel, strictement positif et strictement plus petit que r donc $x + \epsilon \in B(x, r) \cap \mathbb{Q}$.

b. Pour $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, démontrer que $A' = \{0\}$.

Remarquons d'abord que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{(n+1)^2} \text{ et } \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Nous en concluons que $B(\frac{1}{n}, \frac{1}{(n+1)^2}) \cap A = \{\frac{1}{n}\}$ et donc que $\frac{1}{n}$ est un point isolé de A .

Mais pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$ (par exemple $n = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ convient) et donc $\frac{1}{n} \in B(0, \epsilon) \cap A$. Ce qui démontre que 0 n'est pas un point isolé de A .

Nous avons ainsi démontré que $A' = \{0\}$.

2. Si A est fermé, démontrer que A' est fermé.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de A' qui converge vers un point x de E . Comme $A' \subseteq A$, d'après la caractérisation séquentielle du fermé A , le point x appartient à A . Par l'absurde supposons que x n'est pas un point de A' et donc que c'est un point isolé de A . Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

Par définition de la limite il existe N tel que $\forall n \geq N$, $d(x_n, x) < r$. En particulier pour $n = N$, $d(x_N, x) < r$, autrement dit $x_N \in B(x, r)$. Comme x est isolé, et $x_N \in A' \subseteq A$, nous en déduisons que $x_N = x$ et que $x \in A'$ ce qui est une contradiction.

En utilisant la caractérisation séquentielle des fermés nous avons démontré que A' est fermé.

3. Soit K un compact dont tous les points sont isolés. Montrer que K est fini.

Comme tous les points de K sont isolés, pour chaque $x \in K$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \cap K = \{x\}$. Nous avons alors le recouvrement ouvert $K \subseteq \cup_{x \in K} B(x, r_x)$. Comme K est compact, d'après la propriété de BOREL-LEBESGUE, nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini : il existe une partie finie $\mathcal{F}$ de K telle que $K \subseteq \cup_{x \in \mathcal{F}} B(x, r_x)$. En intersectant avec K nous obtenons :

$$K = \left(\bigcup_{x \in \mathcal{F}} B(x, r_x) \right) \cap K = \bigcup_{x \in \mathcal{F}} (B(x, r_x) \cap K) = \bigcup_{x \in \mathcal{F}} \{x\} = \mathcal{F}.$$

Ce qui démontre que K est fini.

4. On considère la fonction $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ telle que $f(x) = 3x - \lfloor 3x \rfloor$. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note f^n l'itérée n fois de f et on considère

$$C_n = \{x \in [0; 1] \mid f^n(x) \in [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1]\}.$$

Enfin, on considère $C = \cap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, avec $C_0 = [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1]$.

a. Tracer la courbe représentative de f .

b. Dessiner, C_0 , C_1 et $C_0 \cap C_1$.

Nous lisons sur la courbe représentative de f que

$$C_1 = [0; \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}; \frac{4}{9}] \cup [\frac{5}{9}; \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}; 1]$$

et

$$C_0 \cap C_1 = [0; \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}; 1].$$

c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C_n est fermé, puis que C est compact.

Nous montrerions par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0; 1]$, $f^n(x) = 3^n x - \lfloor 3^n x \rfloor$.
 Nous en déduisons que l'image réciproque de $C_0 = [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1]$ par f^n est

$$C_n = [0; \frac{1}{3^{n+1}}] \cup [\frac{2}{3^{n+1}}; \frac{4}{3^{n+1}}] \cup [\frac{5}{3^{n+1}}; \frac{7}{3^{n+1}}] \cup \dots \cup [\frac{3^{n+1}-4}{3^{n+1}}; \frac{3^{n+1}-2}{3^{n+1}}] \cup [\frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}}; 1].$$

C_n est donc une union finie de segments de $\mathbb{R}$ donc C_n est fermé (et même compact).
 Une intersection de fermés est fermée donc C est fermé. C est fermé et inclus dans le compact $[0; 1]$, C est donc compact.

d. Démontrer que C est d'intérieur vide.

Vu le calcul de la question précédente, nous remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si une boule $B(x, r) =]x - r; x + r[$ est incluse dans C_n , alors $r \leq \frac{2}{3^{n+1}}$, car $\frac{2}{3^{n+1}}$ est le maximum des diamètres des segments qui apparaissent dans l'union de segments.
 Nous en déduisons que si $B(x, r) =]x - r; x + r[$ est une boule incluse dans tous les C_n , alors $r = 0$. Autrement dit l'intersection C ne contient pas de boules ouvertes non-vides et C est d'intérieur vide.

Autre méthode : Remarquons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq \frac{3^n-1}{2}$, le nombre réel $x_{n,k} = \frac{2k+1}{2 \cdot 3^n}$ n'appartient pas à C_n , en effet $f^n(x_{n,k}) = \frac{1}{2}$.

Remarquons que $x_{n,k+1} - x_{n,k} = \frac{1}{3^n}$

Ainsi pour tout $x \in [0; 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe k , $0 \leq k \leq \frac{3^n-1}{2}$ tel que $|x - x_{n,k}| < \frac{1}{3^n}$. Nous en concluons que pour tout $r > 0$, pour n assez grand la boule $B(x, r)$ contient un point qui n'est pas dans C_n , cette boule n'est donc pas incluse dans C_n et a fortiori n'est pas incluse dans C .

e. Démontrer que C n'a pas de points isolés.

Cette question est difficile. Considérons les fermés emboîtés $D_n = C_0 \cap C_1 \cap \dots \cap C_n$ (pour $n \in \mathbb{N}$). Remarquons que D_{n+1} est obtenu à partir de D_n en enlevant le tiers du milieu de chacun des segments qui composent D_n . En particulier les extrémités des segments qui composent D_n sont aussi des extrémités de segments qui composent D_{n+1} (mais bien sûr les segments sont différents). Par récurrence nous obtenons que les extrémités des segments qui composent D_n sont toutes des éléments de C .

Ces extrémités viennent par paire (à gauche et à droite d'un segment) et elles sont distantes de $\frac{1}{3^{n+1}}$, autrement dit pour tout point x de D_n , il existe au moins deux points distincts de C situés à une distance inférieure ou égale à $\frac{1}{3^{n+1}}$ de x . Nous en déduisons que toute boule de la forme $B(x, r)$ avec $x \in C$ et $r > 0$ contient au moins deux points de C , ce qui montre que C n'a pas de points isolés.