

Exercice I. Cours.

1. Qu'est-ce qu'un fermé dans un espace métrique ?
2. Démontrer qu'un fermé dans un compact est compact.
3. Démontrer que l'image continue d'un compact est compacte.

Exercice II. 1. Donner un exemple d'une union de fermés qui n'est pas fermée.

2. Donner un exemple d'une application continue f et d'un fermé F dont l'image $f(F)$ n'est pas fermée.

3. Donner un exemple d'une application continue f et d'un compact K dont l'image réciproque $f^{-1}(K)$ n'est pas compacte.

4. Donner un exemple d'une application continue f et d'une partie A telles que

$$f^{-1}(\bar{A}) \neq \overline{f^{-1}(A)}.$$

Exercice III. (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, soit $f : E \rightarrow E'$ une application continue et soit A une partie de E . Montrer que

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Exercice IV. Soit (E, d) un espace métrique. Un **point isolé** x d'une partie A de E est un point $x \in A$ tel qu'il existe $r > 0$ avec $B(x, r) \cap A = \{x\}$. On désigne par A' l'ensemble des points de A qui ne sont pas isolés.

1. a. Démontrer que $\mathbb{Q}$ n'a pas de points isolés.
- b. Pour $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, démontrer que $A' = \{0\}$.
2. Si A est fermé, démontrer que A' est fermé.
3. Soit K un compact dont tous les points sont isolés. Montrer que K est fini.

4. On considère la fonction $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ telle que $f(x) = 3x - [3x]$. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note f^n l'itérée n fois de f et on considère

$$C_n = \{x \in [0; 1] \mid f^n(x) \in [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1]\}.$$

Enfin, on considère $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, avec $C_0 = [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1]$.

- a. Tracer la courbe représentative de f .
- b. Dessiner, C_0 , C_1 et $C_0 \cap C_1$.
- c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C_n est fermé, puis que C est compact.
- d. Démontrer que C est d'intérieur vide.
- e. Démontrer que C n'a pas de points isolés.