

Espaces complets

Exercice 1. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans un espace métrique quelconque. Montrer que cette suite converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

Exercice 2. Une métrique complète sur $\mathbb{N}$.

Soit $a > 0$ quelconque. On définit d par $d(m, n) = a + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}$, pour $m \neq n$ et $d(n, n) = 0$. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}$, et que $(\mathbb{N}, d)$ est complet.

Exercice 3. Une métrique non complète sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $d(x, y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$ définit une distance sur $\mathbb{R}$ et que l'espace $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet (on pourra considérer la suite $u_n = n$ et se rappeler que $\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$).

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application injective. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on définit $d(x, y) = \|f(x) - f(y)\|$. Montrer que $(\mathbb{R}, d)$ est complet si et seulement si $f(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet

Trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui soit de Cauchy dans $E := (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ et qui ne converge pas dans E . (On pourra, pour chaque n , couper $[0, 1]$ en trois intervalles tels que f_n soit nulle sur le premier, affine sur le second et égale à 1 sur le troisième).

Exercice 6. Non équivalence des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur c_{00}

On considère l'espace des suites de nombres réels :

$$c_{00} := \{X = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; x_i = 0 \text{ à partir d'un certain rang}\}.$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de points de c_{00} , telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $X_n = (x_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par

$$\begin{cases} x_{n,i} = (1+i)^{-1} \text{ pour } i < n, \\ x_{n,i} = 0 \text{ pour } i \geq n. \end{cases}$$

Soient $E_\infty = (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ et $E_1 = (c_{00}, \|\cdot\|_1)$. Montrer que (X_n) est une suite de Cauchy dans E_∞ et pas dans E_1 . En déduire que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes sur l'espace c_{00} .

Exercice 7. Soient K un espace métrique compact et F un espace métrique complet. On note $C^0(K, F)$ l'ensemble des fonctions continues de K vers F que l'on munit de la distance suivante :

$$d(f, g) := \sup_{x \in K} d_F(f(x), g(x)).$$

Montrer que $(C^0(K, F), d)$ est un espace métrique complet.

Exercice 8. $E_\infty = (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ et $E_1 = (c_{00}, \|\cdot\|_1)$ ne sont pas complets

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $X_n = (x_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$, la suite de points de l'espace c_{00} définie par

$$\begin{cases} x_{n,i} = 2^{-i} \text{ pour } i \leq n, \\ x_{n,i} = 0 \text{ pour } i > n. \end{cases}$$

1. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E_1 et en déduire qu'elle l'est aussi dans E_∞ .
2. Montrer que E_∞ n'est pas complet et en déduire que E_1 ne l'est pas non plus.

Exercice 9. $E = (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est complet

On pose

$$c_0 := \{X = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0\}$$

1. Montrer que c_0 est une partie fermée de l^∞ . En déduire que E est complet.
2. Montrer que c_{00} est dense dans E . En déduire une nouvelle démonstration de l'exercice précédent.
3. Montrer que tout élément $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de c_0 est somme de la série de terme général $x_n e_n$ où $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la base canonique de c_0 .

Exercice 10. l^p est complet

1. Montrer que l'espace $(l^p, \|\cdot\|_p)$, où p est un réel ≥ 1 , est complet.
2. Montrer que tout élément $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l^p est somme de la série de terme général $(x_n e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la base canonique de l^p .

Exercice 11. $E = (c, \|\cdot\|_\infty)$ est complet

On désigne par c le sous-espace de l^∞ formé des suites convergentes. Montrer que c est une partie fermée de l^∞ muni de la norme infinie (par exemple, raisonner en $\varepsilon/3$) et donc que E est complet.

Exercice 12. *Extension du théorème du point fixe*

Soient E un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ tels que pour un entier $p > 0$ la fonction f^p soit une contraction.

1. Montrer que f possède un point fixe.
2. Montrer que ce point fixe est unique. On le note a .
3. Montrer que a est la limite de la suite définie par $x_{k+1} = f(x_k)$ où x_0 est un point arbitraire de E .

Exercice 13. *Une application du théorème du point fixe.* Soient $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et ε un réel tel que $0 < \varepsilon \leq 1$. On pose $I = [0, \varepsilon]$ et $B = \{y \in \mathbb{R}^n; \|y - y_0\| \leq 1\}$. L'espace $E = C(I, B)$ est muni de la distance induite par la norme uniforme sur $C(I, \mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que (E, d) est un espace métrique complet.
2. A tout $f \in E$ on associe $G(f)$ défini par

$$G(f)(t) = y_0 + \int_0^t e^s f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon.$$

Si ε est assez petit montrer que $G(E) \subset E$ et que l'application G est contractante. Déterminer alors le point fixe de G .