Aix–Marseille Université 2015-2016

Mathématiques – L3 – Topologie

PLANCHE D'EXERCICES 4– CONNEXITÉ

Connexité

Exercice 1 Soit A une partie connexe d'un espace métrique X. Montrer que toute partie B telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.

Exercice 2

1. Soient A et B deux parties connexes telles que $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.
2. On suppose maintenant que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.

Exercice 3 Déterminer les parties connexes de $\mathbb{Q}$.

Exercice 4 Montrer que

1) $[0, 1]$ et un cercle de $\mathbb{R}^2$ ne peuvent pas être homéomorphes,

2) $[a, b[$ et $]a, b[$ ne peuvent pas être homéomorphes.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. Nous voulons montrer que f est strictement monotone.

1. Montrer que l'ensemble $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ /x > y\}$ est connexe.
2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = f(x) - f(y)$. Montrer que $F(C)$ est connexe et que $0 \notin F(C)$.
3. En déduire que $F(C) \subset \mathbb{R}^*_+$ ou $\mathbb{R}^*_-$.
4. Conclure.

Exercice 6 On considère le graphe de la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$: $\mathcal{G} = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$.

1. Déterminer l'adhérence $\bar{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$.
2. Montrer que $\bar{\mathcal{G}}$ est connexe

Exercice 7 Montrer que, dans un espace normé $(E, \| \cdot \|)$ de dimension au moins deux, toute sphère est connexe par arcs. En déduire que si $C \subset E$ est convexe borné alors $E \setminus C$ est connexe par arcs.

Exercice 8 Soit $M_n(\mathbb{C})$ (respectivement $M_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$), et soit $GL_n(\mathbb{C})$ (resp. $GL_n(\mathbb{R})$) celles de déterminant non-nul. On considère M_n comme espace vectoriel normé avec n'importe quelle norme.

1) Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ et $P(z)$ le polynôme $P(z) = \text{dét}(Az + (1 - z)B)$.

Montrer que $0, 1$ ne sont pas des racines de $P(z)$.

Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. (On admet que $\mathbb{C}$ privé d'un ensemble fini est connexe par arcs.)

2) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

3) Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe

Exercice 9 Montrer que $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs. Soit A une partie discrète de $\mathbb{R}^2$, montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ est connexe par arcs.