Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Évaluation
lundi 13 mars 2017

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Licence Sciences et Humanités, 3e année
LLC - Théorie des ensembles

Une heure, notes de cours autorisées

Enseignant : T. Coulbois

Exercice I. Tout est ensemble ! 1. Expliquez ce qu'est une fonction pour un-e théoricien-ne des ensembles.
2. Un-e théoricien-ne des ensembles présente l'addition $+$ comme une partie de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Et affirme que

$$\forall x, y, z (x, y, z) \in + \leftrightarrow (y, x, z) \in +.$$

Ré-écrivez cette affirmation de manière plus classique. Commet s'appelle cette propriété ?

Exercice II. Nous avons vu en cours deux versions de l'axiome de fondation :

(1) version naïve : $\forall x, \neg(x \in x)$

(2) version de Zermelo-Fraenkel : $\forall x (x \neq \emptyset) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \forall z (z \in x \rightarrow z \notin y))$

Expliquez pour quoi la deuxième version implique la première *(vous pourrez utiliser l'ensemble $X = \{x\}$ après avoir justifié son existence).*

Exercice III. Des couples et des parties. Soient x et y deux ensembles. On définit le couple $C(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$.
1. En utilisant les axiomes de Zermelo-Fraenkel, démontrer que $C(x, y)$ est un ensemble.
2. En utilisant l'axiome de fondation (dans sa version naïve) démontrer que $C(x, y)$ possède exactement deux éléments.
3. Donner une formule $\varphi(z)$ qui n'est satisfaite que par les ensembles de la forme $C(x, y)$.
4. On se donne deux ensembles X et Y. On considère $Z = \mathcal{P}(X \cup \mathcal{P}(X \cup Y))$. Démontrer que pour chaque élément $x \in X$ et pour chaque élément $y \in Y$, le couple $C(x, y)$ est un élément de Z.
5. Déduire des deux questions précédentes que le produit cartésien $X \times Y$ est un ensemble.

Exercice IV. Le cardinal du continu. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et l'ensemble des parties des nombres entiers $\mathcal{P}(\omega)$ ont le même cardinal.
1. Que signifie cette affirmation ?
2. Sauriez-vous la démontrer ?