Exercice I. Paires et couples. Les mathématicien-nés distinguent les paires $\{x; y\}$ et les couples (x, y) . La nuance étant qu'un couple tient compte de l'ordre. Les coordonnées cartésiennes d'un point du plan sont un couple de nombres réels : l'abscisse et l'ordonnée ne jouent pas le même rôle ; les points de coordonnées $(3, 1)$ et $(1, 3)$ ne sont pas les mêmes.

1. Places les points $(3, 1)$ et $(1, 3)$ dans le plan.

En théorie des ensembles, une paire est un ensemble $\{x; y\}$ à un ou deux éléments ; on dispose d'un axiome qui garantit l'existence des paires. On code le couple (x, y) par l'ensemble $\{x; \{x; y\}\}$.

2. En utilisant l'axiome de la paire, justifier que si x et y sont deux ensembles alors le couple (x, y) est bien un ensemble.

3. En utilisant l'axiome de fondation, démontrer qu'un couple a exactement deux éléments.

4. En utilisant l'axiome d'extensionnalité et une discussion par cas, démontrer que deux couples $\{x; \{x; y\}\}$ et $\{x'; \{x'; y'\}\}$ sont égaux si, et seulement si, $x = x'$ et $y = y'$.

Exercice II. Intersection. L'intersection n'a pas d'axiome spécifique dans l'axiomatique de ZERMELO-FRAENKEL.

1. En utilisant le schéma d'axiomes de compréhension, démontrer que si x et y sont des ensembles alors $x \cap y$ est un ensemble.

2. Plus généralement, définir $\cap x$ de manière analogue à $\cup x$ et démontrer que si x est un ensemble alors $\cap x$ est un ensemble.

Exercice III. Produit cartésien. Le produit cartésien $X \times Y$ de deux ensembles X et Y est l'ensemble de couples (x, y) où $x \in X$ et $y \in Y$.

1. En utilisant le schéma d'axiomes de remplacement, démontrer que pour chaque x , $\{x\} \times Y$ est un ensemble. *Vous pourrez écrire une formule qui réalise une surjection de Y vers $\{x\} \times Y$.*

2. En utilisant le schéma d'axiomes de remplacement et l'axiome de l'union, démontrer que $X \times Y$ est un ensemble.

Exercice IV. Ordinaux. 1. Donner un ensemble qui n'est pas un ordinal.

2. On considère la formule

$$\varphi(x) \equiv (\forall y \forall z ((y \in x) \wedge (z \in x)) \rightarrow ((y \in z) \vee (z \in y) \vee (y = z))) \wedge \\ \forall y \exists z ((y \in x) \rightarrow ((z \in x) \wedge \forall t ((t \in y) \leftrightarrow (t \in z) \vee (t = z))))).$$

a. Commencez par vérifier l'appariement des parenthèses.

b. Puis repérez la variable libre et pour chaque variable liée repérez son quantificateur.

c. Pour un ensemble x qui satisfait $\varphi(x)$, démontrer que cet ensemble est infini.

3. Trouver une bijection entre ω et $\omega + 1 (= \omega \cup \{\omega\})$.

4. Trouver une bijection entre ω et $\omega + \omega$.