

- Exercice I.** 1. Combien y a-t-il de nombres premiers inférieurs à 100 ?
 2. Le nombre 1001 est-il premier ? et 2017 ?
 3. Décomposer en produit de facteurs premiers 2015.
 4. Donner toutes les paires de nombres dont le pgcd est 143 et le ppcm est 6435.

- Exercice II.** Démontrer que pour tout entier n , $n^2 + n$ est divisible par 2.
 1. Démontrer que $2n^3 + 3n^2 + n$ est divisible par 6.
 2. On suppose que a divise b dans $\mathbb{Z}$. Montrer que a^m divise b^m pour tout exposant m .
 3. Démontrer que pour tout entier n , la fraction $\frac{2n+5}{n^2+5n+6}$ est réduite.

- Exercice III.** On appelle **nombres premiers jumeaux** un couple $(p, p+2)$ formé de deux nombres premiers.
 1. Donner quatre exemples de tels couples.
 2. Démontrer que si p est un nombre premier ≥ 5 tel que $p+2$ soit également premier alors $p+p+2$ est divisible par 12.
 3. Existe-t-il trois nombres premiers de la forme $p, p+2, p+4$?

- Exercice IV.** Montrer que $\frac{\ln 7}{\ln 5}$ est irrationnel.

- Exercice V.** Résoudre les équations :

1. $2x \equiv 1 \pmod{7}$, 2. $3x \equiv 7 \pmod{16}$, 3. $2^k \equiv 3 \pmod{23}$, 4. $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{14} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$

- Exercice VI.** L'empereur de Chine, fait aligner ses soldats par rang de 100, il constate qu'il reste 26 soldats. Au son du tambour les soldats forment des rangs de 99 soldats puis de 101 soldats. Il reste alors respectivement 12 et 73 soldats. Combien l'empereur de Chine a-t-il de soldats ?

- Exercice VII.** 1. Quels sont les inversibles de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.
 2. Écrire l'isomorphisme entre $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^\times$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

- Exercice VIII.** Nombre de CARMICHAEL. On considère le nombre $C = 1729$.
 1. Montrer que 1729 n'est pas premier.
 2. Montrer que pour chaque diviseur premier p de 1729, $p-1$ divise $C-1$.
 3. En déduire que pour tout nombre a premier avec 1729, $a^{1728} \equiv 1 \pmod{1729}$.

- Exercice IX.** Le x -ème jour du y -ème mois de l'année $1900+z$, un bateau ayant u hélices, v cheminées et w hommes d'équipage a fait naufrage. L'âge du capitaine, qui venait d'être grand père, était N . On donne la relation,

$$\sqrt[3]{N} + uvwxyz = 11\,888\,815.$$

Calculer toutes les inconnues. (On utilisera le fait que les inconnues sont des nombres entiers et on tiendra compte du sens donné à chacune d'elles, par exemple $1 \leq x \leq 31$).

- Exercice X.** 1. Démontrer que le nombre $4^{12} + 2^6$ est un multiple de 13.
 2. Quel est le reste de la division euclidienne de 2992^{217} par 5 ?
 3. Montrer que $11 \mid 2^{123} + 3^{121}$.

- Exercice XI.** 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $169 \nmid n^2 + 20n + 74$.
 2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9 \mid 2^{2n} + 15n - 1$.