Exercice I. Critères de divisibilités.
1. Démontrer qu'un nombre entier est divisible par 3 si, et seulement si, la somme de ses chiffres décimaux est divisible par 3.
2. Même question avec 9.
3. Donner un critère de divisibilité par 11.
4. Démontrer (sans trop de calculs) que 111 111 111 111 est divisible par 3, 11, 37 et 101.

Exercice II. Systèmes de numérations.
1. Écrire en binaire le nombre 43.
2. Écrire en héxadécimal le nombre 352.
3. Donner l'écriture décimale des nombres dont l'écriture binaire est `0b1001101` et dont l'écriture hexadécimale est `0x9C`.

Exercice III. Fractions.
1. Soit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ deux fractions : $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$. On suppose de plus que $bc - ad = 1$.
a. Démontrer que les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont réduites.
b. Démontrer que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

c. Démontrer que $\frac{a+c}{b+d}$ est réduite.
2. Pour deux fractions fractions réduites $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on note $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Montrer que cette opération n'est pas associative.
3. En partant d'un encadrement $\frac{a}{b} < \pi < \frac{c}{d}$, l'un des deux encadrements $\frac{a}{b} < \pi < \frac{a+c}{b+d}$ ou $\frac{a+c}{b+d} < \pi < \frac{c}{d}$ est vrai. On dit qu'il est obtenu par addition des cancres.
En partant de l'encadrement $\frac{3}{1} < \pi < \frac{4}{1}$ donner les encadrements successifs de π obtenus par addition des cancres.
4. a. Soit x un nombre réel compris entre deux nombres rationnels strictement positifs $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ avec $bc - ad = 1$. Démontrer que l'un des trois nombres rationnels $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$, noté $\frac{p}{q}$, vérifie

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2\sqrt{5}}.$$

b. En déduire le théorème de Hurwitz : Étant donné un irrationnel x, il existe une infinité de nombres rationnels $\frac{p}{q}$ tels que

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2\sqrt{5}}.$$

Exercice IV. Développement décimal des nombres réels.
1. Déterminer le nombre rationnel dont l'écriture décimales est $r = 1,36363636\ldots$
2. On désigne par X l'ensemble des nombres réels dont le développement décimal propre contient le chiffre 9. Construire une suite convergente d'éléments de X dont la limite n'appartient pas à X.
3. a. Dessiner l'ensemble de Cantor C des nombres réels de $[0; 1]$ qui admettent un développement en base 3 ne contenant pas le chiffre 1.
b. Démontrer que C est fermé.
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère le nombre réel x_k défini par son développement décimal

$$x_k = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

où la n-ième décimale a_n est le chiffre des unités de l'écriture décimale du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $q \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\binom{n + 10k!}{k} = \binom{n}{k} + 10q.$$

b. En déduire que x_k appartient à $\mathbb{Q}$.

Exercice V. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels entre 0 et 1. Montrer qu'il existe un nombre réel y et une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier n, y et $x_{\varphi(n)}$ ont les mêmes n premiers chiffres décimaux. En déduire que la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y et que $[0; 1]$ est compact. *(Vous pourrez construire φ et le développement décimal de y par récurrence sur n.)*