Exercice 1. Pour deux éléments g et h d'un groupe, on appelle **commutateur** de g et h, $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$.

1. Soit F le groupe libre de base $\{a, b\}$. Montrer que $[a, b]$ est un produit de trois carrés.

2. Montrer que tout commutateur dans tout groupe est un produit de trois carrés.

3. Montrer que tout groupe d'exposant 2 est abélien.

4. Un groupe d'exposant 3 est-il nécessairement abélien ? Nilpotent ?

5. Qu'est-ce que la conjecture de Burnside ? Quelle sont les réponses pour les exposants 2, 3 et 4 ?

6. Montrer que dans un groupe libre, tout commutateur s'écrit de manière réduite $X^{-1}Y^{-1}Z^{-1}XYZ$, où X, Y et Z sont trois éléments (éventuellement nuls) du groupe.

Pour G un groupe on note G' le **sous-groupe dérivé** de G (c'est-à-dire le sous-groupe de G engendré par les commutateurs).

7. Montrer que G' est un sous-groupe distingué.

8. Montrer que G/G' est abélien.

9. Montrer que F/F' est un groupe abélien libre (voir l'exercice suivant).

10. Dans F le groupe libre de base $\{a, b\}$ donner le plus court élément du sous-groupe dérivé qui n'est pas un commutateur.

Exercice 2. **1.** Donner la propriété universelle des groupes abéliens libres.

2. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe abélien libre est abélien libre.

3. Soit M un groupe abélien de type fini.

3.a. Montrer que $M = T \oplus L$ où T est un groupe abélien fini et L est un groupe abélien libre de type fini.

3.b. Montrer que

$$T = \oplus_i \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} = \oplus_{i,j} \mathbb{Z}/{p_i}^{\alpha_{ij}}\mathbb{Z}.$$

où $n_1|n_2|\cdots|n_r$ et les p_i sont premiers.

4. Donner un exemple de groupe abélien dont tous les sous-groupes de type fini sont libres et qui n'est pas libre.

5. Pour quels ensembles I, $\mathbb{Z}^I$ est-il libre ?

Exercice 3. La topologie profinie sur un groupe G est la topologie la moins fine qui rend continue tous les morphismes de G dans un groupe fini discret. Autrement dit, c'est la topologie de groupe sur G dont une base de voisinage de l'élément neutre est constitué de tous les sous-groupes d'indice fini.

1. Montrer que les définitions ci-dessus définissent des topologies et qu'elles coïncident.

2. Montrer que si F est un groupe libre, la topologie profinie de F est séparée.

Exercice 4. **1.** Soit $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.a. Calculer A_0B_0 et B_0A_0.

1.b. Montrer que ${A_0}^6 = {B_0}^4 = {A_0}^3{B_0}^2 = I_2$.

1.c. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est-il libre ?

2. Soit $H =< A_0, B_0 >$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par A_0 et B_0. On veut montrer que $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On raisonne par l'absurde. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) - H$ telle que $|a| + |c|$ est minimal.

2.a. En multipliant à gauche par $(A_0B_0)^{\pm 1}$ ou $(B_0A_0)^{\pm 1}$ montrer par minimalité que $a = 0$ ou $c = 0$.

2.b. Montrer que si $c = 0$, $X = \pm(A_0B_0)^{\pm b}$.

2.c. Montrer que si $a = 0$, B_0X est de la forme précédente.

2.d. Conclure que $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

3. Soit F le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On veut montrer que F est libre sur $\{A, B\}$.

3.a. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) & \to & \text{Homographies}(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$ est un morphisme de groupe.

Soit $\alpha = \varphi(A)$ et $\beta = \varphi(B)$.

3.b. Montrer que toutes les puissances non-nulles de β envoient l'intérieur du disque unité à l'extérieur du disque unité. Montrer que toutes les puissances non-nulles de α envoient l'extérieur du disque unité à l'intérieur du disque unité (pour cette dernière affirmation on pourra conjuguer α par $z \mapsto \frac{1}{z}$).

3.c. En déduire que si $\gamma = \alpha^{i_1}\beta^{i_2}\cdots\alpha^{i_{n-1}}\beta^{i_n}$ avec $i_k \neq 0$ pour $k = 2, \ldots, n-1$ alors γ est une homographie non-triviale.

3.d. Conclure que $< \alpha, \beta >$ est libre sur $\{\alpha, \beta\}$ et que F est libre sur $\{A, B\}$.

4. En utilisant la même démarche qu'à la question 2, montrer que F est d'indice fini dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 5. Trouver une base du sous-groupe de $F_{\{a,b\}}$:

$$H =< b^2ab^{-1}a^{-2},\ a^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-2},\ b^3a^4b^3a,\ a^5b^{-1}ab^{-1}a > .$$

Exercice 6. Soit ϕ un automorphisme d'un groupe libre F.

1. Montrer que $\phi(F') = F'$. On dit que F' est un sous-groupe **caractéristique** de F (on peut généraliser à tout groupe).

2. Montrer que la projection canonique $\psi : F \to F/F'$ induit un morphisme $\pi : \mathrm{Aut}(F) \to \mathrm{Aut}(F/F')$.

3. Montrer que $\mathrm{Inn}(F) \leq \ker \pi$.

On considère désormais $F = F_2 = F_{\{a,b\}}$.

4. Donner un système de générateur de $\mathrm{Aut}(F_2)$ (revoir la démonstration du théorème de Nielsen).

5. Montrer que $\pi : \mathrm{Aut}(F_2) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ est surjective (voir la question 2.d. de l'exercice 4 du TD 1).

6. Montrer que pour tout automorphisme ϕ de F_2, $\phi([a,b])$ est conjugué à $[a,b]$ ou à $[b,a] = [a,b]^{-1}$.

7. Montrer que $\ker \pi = \mathrm{Inn}(F_2)$ et que l'on a la suite exacte

$$1 \to \mathrm{Inn}(F_2) \to \mathrm{Aut}(F_2) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \to 1.$$

8. Donner un élément de $\mathrm{Aut}(F_3)$ qui induit l'identité sur $F_3/F_3' = \mathbb{Z}^3$ et qui n'est pas un automorphisme intérieur.

Exercice 7. Un groupe P est **projectif** si tout morphisme surjectif $\pi : G \twoheadrightarrow P$ de tout groupe G sur P admet une section $s : P \to G$ (c'est-à-dire que s est un morphisme et que $\pi \circ s = id_P$).

1. Montrer qu'un groupe libre est projectif.

2. En utilisant le théorème de Nielsen-Schreier montrer qu'un groupe projectif est libre.

Un groupe I est **injectif** si tout morphisme injectif $i : I \to G$ de I dans tout groupe G admet une section $\pi : G \to I$ (c'est-à-dire que π est un morphisme et que $\pi \circ i = id_I$).

On va montrer que le seul groupe injectif est le groupe trivial.

3. Soit G un groupe. Soit $G \rtimes \mathrm{Aut}G = \{(g, \phi) | g \in G, \phi \in \mathrm{Aut}G\}$ le **produit semi-direct** de G et $\mathrm{Aut}G$ dont la loi de groupe est

$$(g, \phi)(g', \phi') = (g\phi(g'), \phi \circ \phi').$$

3.a. Montrer que $G \rtimes \mathrm{Aut}G$ est un groupe.

3.b. Montrer que $\begin{array}{rccc} i : & G & \to & G \rtimes \mathrm{Aut}G \\ & g & \mapsto & (g, id) \end{array}$ est un morphisme injectif.

4. En utilisant la construction précédente, montrer que si I est un groupe injectif alors $\mathrm{Aut}I = \{id\}$.

5. En déduire que si I est un groupe injectif alors $\mathrm{Inn}I = \{id\}$ et que I est commutatif, puis que $g \mapsto g^{-1}$ est trivial, que I est d'exposant 2 et donc que $I = \{id\}$.

6. Un groupe commutatif D est **injectif dans la catégorie des groupes commutatifs** si tout morphisme injectif $i : D \to A$ de D dans tout groupe commutatif A admet une section $\pi : A \to D$ (c'est-à-dire que π est un morphisme et que $\pi \circ i = id_D$).

Montrer qu'un groupe commutatif est injectif dans la catégorie des groupes commutatifs si et seulement si il est divisible.