Exercice 1. Soit ϕ un automorphisme d'un groupe libre F.

1. Montrer que $\phi(F') = F'$. On dit que F' est un sous-groupe **caractéristique** de F (on peut généraliser à tout groupe).

2. Montrer que la projection canonique $\psi : F \to F/F'$ induit un morphisme $\pi : \mathrm{Aut}(F) \to \mathrm{Aut}(F/F')$.

3. Montrer que $\mathrm{Inn}(F) \leq \ker \pi$.

On considère désormais $F = F_2 = F_{\{a,b\}}$.

4. Donner un système de générateur de $\mathrm{Aut}(F_2)$ (revoir la démonstration du théorème de Nielsen).

5. Montrer que $\pi : \mathrm{Aut}(F_2) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ est surjective (voir la question 2.d. de l'exercice 4 du TD 1).

6. Montrer que pour tout automorphisme ϕ de F_2, $\phi([a,b])$ est conjugué à $[a,b]$ ou à $[b,a] = [a,b]^{-1}$.

7. Montrer que $\ker \pi = \mathrm{Inn}(F_2)$ et que l'on a la suite exacte

$$1 \to \mathrm{Inn}(F_2) \to \mathrm{Aut}(F_2) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \to 1.$$

8. Donner un élément de $\mathrm{Aut}(F_3)$ qui induit l'identité sur $F_3/F_3' = \mathbb{Z}^3$ et qui n'est pas un automorphisme intérieur.

Exercice 2. Un groupe P est **projectif** si tout morphisme surjectif $\pi : G \twoheadrightarrow P$ de tout groupe G sur P admet une section $s : P \to G$ (c'est-à-dire que s est un morphisme et que $\pi \circ s = id_P$).

1. Montrer qu'un groupe libre est projectif.

2. En utilisant le théorème de Nielsen-Schreier montrer qu'un groupe projectif est libre.

Un groupe I est **injectif** si tout morphisme injectif $i : I \to G$ de I dans tout groupe G admet une section $\pi : G \to I$ (c'est-à-dire que π est un morphisme et que $\pi \circ i = id_I$).

On va montrer que le seul groupe injectif est le groupe trivial.

3. Soit G un groupe. Soit $G \rtimes \mathrm{Aut}G = \{(g,\phi) | g \in G, \phi \in \mathrm{Aut}G\}$ le **produit semi-direct** de G et $\mathrm{Aut}G$ dont la loi de groupe est

$$(g,\phi)(g',\phi') = (g\phi(g'), \phi \circ \phi').$$

3.a. Montrer que $G \rtimes \mathrm{Aut}G$ est un groupe.

3.b. Montrer que $i : \begin{array}{ccc} G & \to & G \rtimes \mathrm{Aut}G \\ g & \mapsto & (g, id) \end{array}$ est un morphisme injectif.

4. En utilisant la construction précédente, montrer que si I est un groupe injectif alors $\mathrm{Aut}I = \{id\}$.

5. En déduire que si I est un groupe injectif alors $\mathrm{Inn}I = \{id\}$ et que I est commutatif, puis que $g \mapsto g^{-1}$ est trivial, que I est d'exposant 2 et donc que $I = \{id\}$.

6. Un groupe commutatif D est **injectif dans la catégorie des groupes commutatifs** si tout morphisme injectif $i : D \to A$ de D dans tout groupe commutatif A admet une section $\pi : A \to D$ (c'est-à-dire que π est un morphisme et que $\pi \circ i = id_D$).

Montrer qu'un groupe commutatif est injectif dans la catégorie des groupes commutatifs si et seulement si il est divisible.