

- Exercice 1.**
1. Montrer que  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  est une variété compacte de dimension 3.
  2. Soit  $e_1 = (1, 0, 0)$  et  $\phi : \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Montrer que les fibres de  $\phi$  sont des cercles  $\mathbb{S}^1$ .  

$$f \mapsto f(e_1)$$
  3. Est-ce que  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  ?
  4. À l'aide d'une bande de papier, se convaincre que  $\pi_1(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Exercice 2.** 1. Soit  $P$  un point de  $\mathbb{S}^3$ . Montrer que  $U = \mathbb{S}^3 - \{P\}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$ .

2. Soit  $T = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid (\rho - 1)^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}\}$  où  $(\rho, \phi, z)$  sont les coordonnées cylindriques de  $M$ . On désigne aussi par  $T$  l'image inverse de  $T$  par l'homéomorphisme de la question précédente (ou plus généralement par tout homéomorphisme entre un ouvert de  $\mathbb{S}^3$  et  $\mathbb{R}^3$ ). Montrer que le complémentaire de l'intérieur de  $T$  dans  $\mathbb{S}^3$  est homéomorphe à  $T$ .

**Exercice 3.** 1. Soit  $a$  le méridien d'un tore et  $b$  son équateur. Faire une succession de dessin pour montrer que  $ab = ba$  dans le groupe fondamental.

2. Soit  $S$  la surface à bord obtenue en enlevant un disque au tore. Montrer que  $S$  peut se rétracter par déformation sur un 8.

**Exercice 4.** Soit  $X_n$  l'espace des applications injectives de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\mathbb{D}^2$ , le disque unité ouvert du plan euclidien. On munit  $X_n$  de la topologie induite par la topologie produit.

1. Montrer que  $X_1$  est homéomorphe à  $\mathbb{D}^2$ .
2. Montrer que  $X_n$  est une variété de dimension  $2^n$ .
3. Montrer que  $X_n$  est connexe. Est-il compact ?
4. Montrer que  $X_2$  peut être contracté par déformation sur  $\mathbb{S}^1$  (ici  $\mathbb{S}^1$  est le cercle centré en l'origine et de rayon  $\frac{1}{2}$ ).

Le groupe fondamental de  $X_n : \mathrm{PB}_n = \pi_1(X_n)$  est le groupe des tresses pures à  $n$  brins.

On considère maintenant l'espace  $Y_n$  des parties à  $n$  éléments de  $\mathbb{D}^2$ , muni de la topologie (ou de la distance) de Hausdorff.

5. Reprendre les quatre questions précédentes (pour la quatrième question on montrera que  $Y_2$  peut être contracté sur l'espace des paires de points de  $\mathbb{S}^1$  qui est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ ).

Le groupe fondamental de  $Y_n : \mathrm{B}_n = \pi_1(Y_n)$  est le groupe des tresses à  $n$  brins.

Il est engendré par les éléments  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  indiqués sur le dessin.

6. Montrer (par des dessins) que  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ .