Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie et analyse

Partiel 1
mardi 15 novembre 2016

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Deux heures, ni calculatrices ni documents

Enseignant-es : T. Coulbois, L. Paoluzzi, A. Pichon

Exercice I. **1.** Qu'est-ce qu'un ouvert d'un espace métrique ?
2. Soit f une application continue d'un espace métrique (E, d) à valeur dans un espace métrique (E', d'). Soit V un ouvert de E'. Démontrer que l'image réciproque de V par f est une partie ouverte de E.
3. Donner un exemple d'une application continue et d'un ouvert dont l'image n'est pas ouverte.

Exercice II. Donner un exemple d'une partie A de $\mathbb{R}$ telle que $\overline{\mathring{A}} \neq \mathring{A}$. *(Vous pourrez vous contenter de donner les quatre ensembles considérés sans démonstration.)*

Soit $A =]0;1[\cup]1;2[$. Alors $\overline{A} = [0;2]$, $\mathring{A} = A$ et $\overset{\circ}{\overline{A}} =]0;2[$.

b) On considère $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \neq 0 \text{ et } y = \cos(1/x)\}$. Soit $y \in [-1;1]$, donner une suite de points $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de points de B qui converge vers $(0, y)$.

Soit $\theta = \arccos y \in [0;\pi]$. Pour tout entier n, soit $x_n = \frac{1}{\theta+2\pi n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit alors $y_n = \cos\frac{1}{x_n} = \cos(\theta + 2\pi n) = \cos(\theta) = y$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) \in B$ et cette suite converge vers $(0, y)$.

c) Donner (sans justification) l'adhérence et l'intérieur de B.

L'adhérence est $\{0\} \times [-1;1] \cup B$. L'intérieur est vide.

Exercice III. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $P \in E$, on pose

$$\|P\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| \quad \textit{et} \quad \|P\|_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}}(e^{-|t|}|P(t)|)$$

1) Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont des normes sur E.

Commençons par rappeler qu'une fonction polynômiale est continue et qu'elle atteind donc son maximum sur $[0;1]$, la borne supérieure existe donc et $\|P\|_1$ est bien définie et est un nombre réel positif. La fonction $t \mapsto e^{-|t|}|P(t)|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, comme l'exponentielle l'emporte sur les puissances, elle admet 0 comme limites quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Cette fonction est donc bornée sur $\mathbb{R}$ et possède une borne supérieure.
Nous vérifions facilement l'homogénéité : $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall P \in E$, $\|\lambda P\|_1 = \sup_{t\in[0;1]} |\lambda P(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| = |\lambda|\|P\|_1$ et de même pour $\|\lambda P\|_2 = |\lambda|\|P\|_2$.
Soit $P \in E$ tel que $\|P\|_1 = 0$ alors par définition de la borne supérieure $\forall t \in [0;1]$, $\|P(t)| = 0$ et donc P possède une infinité de racines (tout les nombres de $[0;1]$). P est donc le polynôme constant nul. De même si $\|P\|_1 = 0$ alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-|t|}\|P(t)| = 0$ et comme $e^{-|t|} \neq 0$, $P(t) = 0$ et P est donc le polynôme constant nul.
Finalement soit $P, Q \in E$. Calculons : $\|P + Q\|_1 = \sup_{t\in[0;1]} |P(t) + Q(t)|$. Or pour tout $t \in [0;1]$, l'inégalité triangulaire de la valeur absolue pour les nombres réels nous donne $|P(t)+Q(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)|$. La borne supérieure étant un majorant nous obtenons : $|P(t) + Q(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq \sup_{u\in[0,1]} |P(u)| + \sup_{u\in[0,1]} |Q(u)|$. La borne supérieure étant le plus petit des majorants et l'inégalité précédente étant vraie pour tout $t \in [0;1]$, nous concluons que $\|P + Q\|_1 \leq \|P\|_1 + \|Q\|_1$.
La même démonstration permet de démontrer que $\|P + Q\|_2 \leq \|P\|_2 + \|Q\|_2$.

2) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $P \in E$, $\|P\|_1 \leq C\|P\|_2$.

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $t \in [0;1]$, $e^{-t} \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$. en multipliant par $|P(t)|$, nous obtenons $|P(t)| \leq ee^{-t}|P(t)|$. En passant à la borne supérieure, $|P(t)| \leq e\sup_{u\in[0;1]} e^{-u}|P(u)| \leq e\sup_{u\in\mathbb{R}} e^{-|u|}|P(u)| = e\|P\|_2$. Comme cette inégalité est vraie pour tout $t \in [0;1]$, nous obtenons $\|P\|_1 \leq e\|P\|_2$.

3) Soit $n \geq 0$ un entier. Calculer $\|P\|_1$ et $\|P\|_2$ pour $P(t) = t^n$. En déduire que les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\|t^n\|_1 = \sup_{t\in[0;1]} |t^n| = 1$. Étudions la fonciton $f_n : t \mapsto e^{-|t|}t^n$. Remarquons d'abord que c'est une fonction paire et restreignons notre étude à $\mathbb{R}^+$. Bien sûr $f_n(0) = 0$ et $\lim_{t\to\infty} f_n(t) = 0$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(t) = t^{n-1}(n-t)e^{-t}$. La fonction atteind donc son maximum sur $[0;+\infty]$ (et donc sur $\mathbb{R}$ par parité) en $t = n$ et ce maximum est $\|P\|_2 = n^n e^{-n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ce qui montre que $\|\cdot\|_2$ n'est pas majorée par (un multiple de) $\|\cdot\|_1$ et que les deux normes ne sont pas équivalentes sur E.

Exercice IV. Soit $f\colon (X,d) \to (X',d')$ une application continue entre deux espaces métriques (X,d) et (X',d').

1) Montrer que le graphe de f est fermé dans $X \times X'$ et homéomorphe à X.

Soit $((x_n,x_n'))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points du graphe de f qui converge vers (x,x') dans $X \times X'$. Par définition du graphe d'une fonction pour tout entier n, $x_n' = f(x_n)$. Par définition de la topologie sur le produit cartésien, la suite de points de X $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. Par continuité de la fonction f nous en déduisons que la suite $(x_n' = f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans X'. En utilisant à nouveau la définition du produit cartésien, la suite $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x' et par unicité de la limite $x' = f(x)$ et (x,x') est un point du graphe de la fonction f. En utilisant la caractérisation séquentielle des fermés nous avons démontré que le graphe de la fonction f est une partie fermée de $X \times X'$.
L'application $f^* : X \to X \times X'$, $x \mapsto f^*(x) = (x, f(x))$ est continue (car ces deux applications coordonnées le sont), injective (car sa première coordonnée, l'identité, l'est). Son image est le graphe de la fonction f. Elle définit donc une bijection continue entre X et le graphe de f. La bijection réciproque est simplement la restriction au graphe de la fonction f de la projection sur la première coordonnée qui est une application continue.
Nous avons ainsi démontré que X est homéomorphe au graphe de la fonction f.

2) Soit $g\colon (X,d) \to (X',d')$ une application également continue.
Montrer que $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

Soit F le graphe de la fonction f et G celui de g. D'après la question précédente F et G sont des parties fermées de $X \times X'$. Leur intersection $F \cap G$ est donc un fermé et l'ensemble cherché est son image réciproque par f (ou g), c'est donc une partie fermée de X.