Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie et analyse

Partiel 1
mardi 15 novembre 2016

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Deux heures, ni calculatrices ni documents

Enseignant-es : T. Coulbois, L. Paoluzzi, A. Pichon

Exercice I. **1.** Qu'est-ce qu'un ouvert d'un espace métrique ?
2. Soit f une application continue d'un espace métrique (E,d) à valeur dans un espace métrique (E',d'). Soit V un ouvert de E'. Démontrer que l'image réciproque de V par f est une partie ouverte de E.
3. Donner un exemple d'une application continue et d'un ouvert dont l'image n'est pas ouverte.

Exercice II. Donner un exemple d'une partie A de $\mathbb{R}$ telle que $\overline{\mathring{A}} \neq \mathring{A}$. *(Vous pourrez vous contenter de donner les quatre ensembles considérés sans démonstration.)*
b) On considère $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \neq 0 \text{ et } y = \cos(1/x)\}$. Soit $y \in [-1;1]$, donner une suite de points $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de points de B qui converge vers $(0,y)$.
c) Donner (sans justification) l'adhérence et l'intérieur de B.

Exercice III. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $P \in E$, on pose

$$\|P\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| \quad et \quad \|P\|_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} (e^{-|t|}|P(t)|)$$

1) Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont des normes sur E.
2) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $P \in E$, $\|P\|_1 \leq C\|P\|_2$.
3) Soit $n \geq 0$ un entier. Calculer $\|P\|_1$ et $\|P\|_2$ pour $P(t) = t^n$. En déduire que les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice IV. Soit $f\colon (X,d) \to (X',d')$ une application continue entre deux espaces métriques (X,d) et (X',d').
1) Montrer que le graphe de f est fermé dans $X \times X'$ et homéomorphe à X.
2) Soit $g\colon (X,d) \to (X',d')$ une application également continue.
Montrer que $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.