

Exercice I. Cours. Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et $f : E \rightarrow E'$ une application continue. Soit U' une partie ouverte de E' . Démontrer que l'image réciproque par f de U' est une partie ouverte de E .

Exercice II. 1. Donner un exemple d'une réunion de parties fermées dans un espace métrique qui n'est pas fermée.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ considérons l'intervalle fermé $F_n = [\frac{1}{n}; 1]$. C'est un fermé de $\mathbb{R}$. L'union $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n =]0; 1]$ n'est pas une partie fermée de $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que le cône ouvert

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x \text{ et } y > 0\}$$

est une partie ouverte de l'espace métrique $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne.

Soit (x_0, y_0) un point de C . Soit $r = \min(y_0, \frac{1}{2}(x_0 - y_0))$. Alors $r > 0$ par définition de C . Et la boule de centre (x_0, y_0) et de rayon r est incluse dans C . (Notez que r n'est pas le rayon maximal qui est donné par le minimum entre les distances à l'axe des abscisses : y_0 et à la première bissectrice du repère : $\frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 - y_0)$. Un beau dessin suffit à justifier cette inclusion.)

Pour tout $(x, y) \in B((x_0, y_0), r)$, par définition de la boule $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$ donc $|y - y_0| < r \leq y_0$. Nous en déduisons que $y > y_0 - y_0 = 0$ ce qui est la première inégalité définissant C .

De même $|x - x_0| < r \leq \frac{1}{2}(x_0 - y_0)$. Et donc $x > \frac{1}{2}(x_0 + y_0)$. Nous avons encore en revenant à la définition de la boule $|y - y_0| < r \leq \frac{1}{2}(x_0 - y_0)$ et donc $y < \frac{1}{2}(x_0 + y_0)$. Nous pouvons donc conclure par transitivité que $y < x$ ce qui est la deuxième inégalité définissant C .

Nous avons donc démontré que (x, y) appartient à C et donc que la boule proposée est incluse de C . Ce qui démontre finalement que C est une partie ouverte du plan euclidien.

3. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x^2 - [x^2] < \frac{1}{2}\}$ est-il une partie ouverte de $\mathbb{R}$ (muni de sa valeur absolue) ?

Pour un nombre réel y , $[y]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à y : $[y] \in \mathbb{Z}$ et $[y] \leq y < [y] + 1$.

Nous constatons que A est l'union de tous les intervalles de la forme $]\sqrt{k}, \sqrt{k + \frac{1}{2}}[$ et $]-\sqrt{k + \frac{1}{2}}, -\sqrt{k}[$ pour tous les entiers $k \in \mathbb{N}$. C'est donc une union de parties ouvertes de $\mathbb{R}$. Ce qui démontre que A est une partie ouverte de $\mathbb{R}$.

Exercice III. Pour l'espace $E = \mathbb{R}$, on considère l'application : $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

1. Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$

Nous remarquons d'abord que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire. Nous restreignons donc notre étude à l'intervalle $[0; +\infty[$. Nous calculons facilement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. La courbe représentative de la fonction f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.

La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Démontrer que d est une distance sur E .

À cause de la valeur absolue d est bien à valeur dans $\mathbb{R}^+$ et est symétrique.

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

Quelques soient $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) = 0 \iff f(x) = f(y)$. La fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] -1; 1[$ donc $d(x, y) = 0 \iff x = y$. Ce qui démontre que d vérifie l'axiome de séparation.

Quelques soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, en utilisant l'inégalité triangulaire de la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ nous obtenons : $d(x, z) = |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = d(x, y) + d(y, z)$. Ce qui démontre que d vérifie l'inégalité triangulaire.

Nous avons donc démontré que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer la limite quand n tend vers l'infini de la distance entre 0 et n .

Pour tout entier n $d(0, n) = |f(0) - f(n)| = f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

4. Dessiner la boule de (E, d) de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$

Par définition $B_d(0, \frac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(0, x) < \frac{1}{2}\}$. Raisonnons par équivalences :

$$\forall x \in \mathbb{R}, d(0, x) < \frac{1}{2} \iff \left| \frac{x}{1+|x|} \right| < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2}|x| < \frac{1}{2} \iff -1 < x < 1.$$

La boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$ est donc l'intervalle $] -1; 1[$.

5. Dessiner la boule de (E, d) de centre 3 et de rayon $\frac{1}{8}$

De même :

$$\forall x \in \mathbb{R}, d(3, x) < \frac{1}{8} \iff \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{3}{1+|3|} \right| < \frac{1}{8} \iff -\frac{1}{8} < \frac{x}{1+|x|} - \frac{3}{4} < \frac{1}{8} \iff \frac{5}{8} < \frac{x}{1+|x|} < \frac{7}{8}$$

Nous en déduisons que $x > 0$ et donc que $|x| = x$, puis que

$$\iff \frac{5}{8}(1+x) < x < \frac{7}{8}(1+x) \iff \frac{5}{8} < \frac{3}{8}x \text{ et } \frac{1}{8}x < \frac{7}{8} \iff \frac{5}{3} < x < 7.$$

La boule de centre 3 et de rayon $\frac{1}{8}$ est donc l'intervalle $] \frac{5}{3}; 7[$.