

Exercice I. Cours. Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et $f : E \rightarrow E'$ une application continue. Soit U' une partie ouverte de E' . Démontrer que l'image réciproque par f de U' est une partie ouverte de E .

Exercice II. 1. Donner un exemple d'une réunion de parties fermées dans un espace métrique qui n'est pas fermée.
2. Démontrer que le cône ouvert

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x \text{ et } y > 0\}$$

est une partie ouverte de l'espace métrique \mathbb{R}^2 muni de la distance euclidienne.

3. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x^2 - [x^2] < \frac{1}{2}\}$ est-il une partie ouverte de \mathbb{R} (muni de sa valeur absolue)?
Pour un nombre réel y , $[y]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à y : $[y] \in \mathbb{Z}$ et $[y] \leq y < [y] + 1$.

Exercice III. Pour l'espace $E = \mathbb{R}$, on considère l'application : $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$

1. Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$
2. Démontrer que d est une distance sur E .
3. Calculer la limite quand n tend vers l'infini de la distance entre 0 et n .
4. Dessiner la boule de (E, d) de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$
5. Dessiner la boule de (E, d) de centre 3 et de rayon $\frac{1}{8}$