Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie et analyse

Deuxième contrôle
Mardi 6 décembre 2016

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Une heure. Ni calculatrices, ni documents

Enseignant-es : T. Coulbois, L. Paoluzzi, A. Pichon

Exercice I. Cours.

1. Donner la définition d'une suite de Cauchy

2. Démontrer qu'une suite de Cauchy qui admet une suite extraite convergente, converge.

Exercice II. Soit K une partie compacte du plan euclidien.

1. Soit P un point du plan qui n'appartient pas à K. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout point M de K, $d(M, P) \geq \delta$.

Nous savons qu'une partie compacte est toujours fermée. Le complémentaire de K est donc une partie ouverte du plan et comme P est un point de ce complémentaire, il existe un rayon $\delta > 0$ tel que la boule $B(P, \delta)$ centrée en P et de rayon δ soit incluse dans ce complémentaire. Ainsi pour tout point M de K, M n'est pas dans le complémentaire donc a fortiori M n'est pas dans la boule $B(P, \delta)$ et donc $d(P, M) \geq \delta$.

2. Soit B une partie compacte disjointe de K. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout point M de K et pour tout point N de B, $d(M, N) \geq \delta$.

Par l'absurde supposons que pour tout $\delta > 0$, il existe un point M de K et un point N de B (qui dépendent tous les deux de δ), tels que $d(M, N) < \delta$. En particulier pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, en considérant $\delta = \frac{1}{n}$, il existe M_n un point de K et N_n un point de B tel que $d(M_n, N_n) < \frac{1}{n}$.
En utilisant la propriété de Bolzano-Weierstrass pour le compact K il existe une suite extraite $(M_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers un point M de K. De même on peut extraire une suite convergente $(N_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la suite $(N_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de points du compact B. Appelons N la limite de la suite $(N_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Alors la suite $(M_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite extraite de la suite convergente $(M_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, elle converge donc et vers la même limite M.
Enfin pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $d(M_{\varphi(\psi(n))}, N_{\varphi(\psi(n))}) \leq \frac{1}{\varphi(\psi(n))}$. Comme φ et ψ sont des fonctions strictement croissantes, par comparaison nous obtenons que

$$\lim_{n\to\infty} d(M_{\varphi(\psi(n))}, N_{\varphi(\psi(n))}) = 0.$$

Par continuité de la distance, cette limite est égale à $d(M, N)$ qui est donc nul. Nous concluons que $M = N$ est un point commun de K et B ce qui est une contradiction.
Par l'absurde nous avons démontré qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout point M de K et pour tout point N de B, $d(M, N) \geq \delta$.

3. Soit C une partie fermée disjointe de K. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout point M de A et pour tout point N de C, $d(M, N) \geq \delta$.

À la question précédente nous aurions pu remarquer que B est une partie fermée du plan et utiliser la preuve ci-dessous.
Comme précédemment, par l'absurde soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de points de K et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de points de C telles que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $d(M_n, N_n) < \frac{1}{n}$.
D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass pour le compact K il existe une suite extraite $(M_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers un point M de K.
Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, d'après l'inégalité triangulaire

$$d(N_{\varphi(n)}, M) \leq d(M_{\varphi(n)}, M_{\varphi(n)}) + d(M_{\varphi(n)}, M) \leq \frac{1}{\varphi(n)} + d(M_{\varphi(n)}, M)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ nous en déduisons que la suite de points $(N_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers M.
Comme C est une partie fermée du plan, cette suite de points de C a sa limite dans C. Donc $M \in C$.
Ce qui contredit le fait que K et C sont disjoints.
Par l'absurde nous avons démontré qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout point M de K et pour tout point N de C, $d(M, N) \geq \delta$.

Exercice III. On considère l'espace ℓ^1 des suites $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels dont la série converge absolument et on considère la norme

$$\|X\|_1 = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on considère la suite $X_k = (x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n,k} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ 1 \text{ si } n = k. \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers la suite constante nulle.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculons :

$$\|X_k\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_{n,k}| = \sum_{n=0}^{k-1} |x_{n,k}| + |x_{k,k}| + \sum_{n=k+1}^{+\infty} |x_{n,k}| = 0 + 1 + 0 = 1$$

La suite de points de ℓ^1 ne converge donc pas vers la suite constante nulle.

2. Démontrer que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne possède aucune suite extraite convergente.

Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p < q$ calculons de nouveau :

$$\|X_p - X_q\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_{n,p} - x_{n,q}|$$

$$= \sum_{n=0}^{p-1} |x_{n,p} - x_{n,q}| + |x_{p,p} - x_{p,q}| + \sum_{n=p+1}^{q-1} |x_{n,p} - x_{n,q}| + |x_{q,p} - x_{q,q}| + \sum_{n=q+1}^{+\infty} |x_{n,p} - x_{n,q}|$$

$$= 0 + |1 - 0| + 0 + |0 - 1| + 0 = 2.$$

Nous en déduisons qu'aucune suite extraite de la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est de Cauchy.
En effet soit $(X_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite convergente alors elle est de Cauchy. En particulier pour $\epsilon = 1$ il existe N tel que pour tout $p, q \geq N$, $\|X_p - X_q\|_1 < 1$. En prenant $p = N$ et $q = N + 1$ nous obtenons une contradiction avec le calcul précédent.
Nous avons donc démontré qu'aucune suite extraite de la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est convergente.

3. En déduire que la boule fermée de centre la suite nulle et de rayon 1 de l'espace ℓ^1 n'est pas compacte.

D'après la première question, la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de la boule unité fermée et d'après la deuxième question cette sutie n'a pas de suite extraite convergente. La propriété de Bolzano-Weierstrass permet donc d'affirmer que cette boule n'est pas compacte.