Licence de mathématiques, 3e année
Topologie et analyse

Deuxième contrôle
Mardi 6 décembre 2016

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Une heure. Ni calculatrices, ni documents

Enseignant-es : T. Coulbois, L. Paoluzzi, A. Pichon

Exercice I. Cours.
1. Donner la définition d'une suite de Cauchy
2. Démontrer qu'une suite de Cauchy qui admet une suite extraite convergente, converge.

Exercice II. Soit K une partie compacte du plan euclidien.
1. Soit P un point du plan qui n'appartient pas à K. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout point M de K, $d(M, P) \geq \delta$.
2. Soit B une partie compacte disjointe de K. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout point M de K et pour tout point N de B, $d(M, N) \geq \delta$.
3. Soit C une partie fermée disjointe de K. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout point M de A et pour tout point N de C, $d(M, N) \geq \delta$.

Exercice III. On considère l'espace ℓ^1 des suites $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels dont la série converge absolument et on considère la norme

$$\|X\|_1 = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on considère la suite $X_k = (x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n,k} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ 1 \text{ si } n = k. \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers la suite constante nulle.
2. Démontrer que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne possède aucune suite extraite convergente.
3. En déduire que la boule fermée de centre la suite nulle et de rayon 1 de l'espace ℓ^1 n'est pas compacte.