

Devoir à la maison

À rendre mardi 27 septembre 2016

- ☐ Aix-Montperrin
- ☒ Luminy
- ☒ Saint-Charles
- ☐ Saint-Jérôme
- ☐ Château-Gombert

Vous apporterez un grand soin à la rédaction

Enseignant-es : T. Coulbois, L. Paoluzzi, A. Pichon

Exercice I. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Calculer $f(]-3, 1[)$, $f^{-1}(]-3, 2])$, $f^{-1}(f([1; +\infty[))$.
3. l'équivalence $x < y \iff \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ est-elle vraie? Justifier.

Exercice II.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, A et B des parties de E et C et D des parties de F .

Pour chacune des affirmations suivantes donner un contreexemple.

1. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
2. $f(A) \subseteq f(B) \Rightarrow A \subseteq B$
3. $f(f^{-1}(C)) = C$

Démontrer les affirmations suivantes.

4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
5. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
6. Si f est injective, démontrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice III.

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.