Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie et analyse

Deuxième devoir à la maison
À rendre mardi 8 novembre 2016

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Vous apporterez un grand soin à la rédaction

Enseignant-es : T. Coulbois, L. Paoluzzi, A. Pichon

Exercice I. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1), \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
1. Démontrer qu'il n'est pas de dimension finie.
2. Donner un exemple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E qui converge pour la norme $\|\cdot\|_1$, mais qui ne converge pas pour la norme $\|\cdot\|_2$.
3. Démontrer que si une suite de fonctions dans E converge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors elle converge pour la norme $\|\cdot\|_1$ et les deux limites sont égales.

Exercice II. Soit A une partie d'un espace métrique (E, d) et soit une application $f : E \to E$.
1. Démontrer que si f est une application continue alors $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
2. Démontrer la réciproque : si pour toute partie A de E, $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ alors f est continue.

Exercice III. Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et $f : E \to E'$ et $g : E \to E'$ deux applications continues. Démontrer que si la partie $A = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ est dense dans E, alors f et g sont égales.

Exercice IV. Soit E l'espace des suites de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées. Soit d l'application définie sur $E \times E$ par

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

1. Démontrer que d est une distance sur E.
2. Soit A la partie de E constituée des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont nulles à partir d'un certain rang. Démontrer que l'adhérence de A est la partie $\bar{A}$ de E constituée des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers 0.