Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie et analyse

Examen
lundi 9 janvier 2017

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Trois heures, ni calculatrices ni documents

Enseignant-es : T. Coulbois, L. Paoluzzi, A. Pichon

Exercice I.

1. la formule $d(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ définit-elle une distance sur $\mathbb{R}$?

On a $d(0, 1) = 1$ et $d(0, 1/2) = d(1/2, 1) = 1/4$. Donc $d(0, 1) > d(0, 1/2) + d(1/2, 1)$, ce qui montre que l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite. Donc d ne définit pas une distance.

2. Démontrer que deux métriques équivalentes définissent les mêmes ouverts.

Soient d_1 et d_2 deux métriques équivalentes sur un ensemble E, c'est-à-dire qu'il existe des réels $A, B > 0$ tels que pour tous $x, y \in E$, $Ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Bd_1(x, y)$. Montrons que tout ouvert pour d_1 est un ouvert pour d_2 (la réciproque sera alors automatiquement réalisée par symétrie des rôles.). Soit O_1 un ouvert pour d_1 et soit $x \in O_1$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B_{d_1}(x, r) \subset O_1$. Fixons un tel r et posons $r' = \frac{r}{B}$. Alors pour tout $y \in B_{d_2}(x, r') \subset U_1$, on a $d_1(x, y) \leq Bd_2(x, y) < B\frac{r}{B} = r$. Donc $B_{d_2}(x, r') \subset B_{d_1}(x, r) \subset U_1$. Finalement, pour tout $x \in O_1$, il existe $r' > 0$ tel que $B_{d_2}(x, r') \subset U_1$. Donc U_1 est un ouvert pour d_2.

3. Donner la définition de Borel-Lebesgue d'un espace compact.

Un espace métrique E est dit compact si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un recouvrement fini.

Exercice II.

Soit O une partie ouverte d'un espace métrique (E, d). Démontrer que pour toute partie A de E on a l'équivalence

$$A \cap O = \emptyset \iff \bar{A} \cap O = \emptyset.$$

Puisque $A \subset \overline{A}$, l'implication $\Rightarrow$ est immédiate. Montrons $\Leftarrow$ par contraposée. Supposons $\bar{A} \cap O \neq \emptyset$ et soit $x \in \bar{A} \cap O$. Puisque $x \in \bar{A}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x. Par ailleurs, puisque O est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r)$. Puisque (x_n) converge vers x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N, x_n \in B(x, r)$. Mais alors $x_N \in O \cap \bar{A}$. Donc $O \cap \bar{A} \neq \emptyset$.

Exercice III.

On note $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application $\Phi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \Phi(f) = \int_0^1 f(x)^2 \, dx$$

1. Rappeler les définitions des normes usuelles $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

2. On munit $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$. Démontrer que l'application Φ est continue sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Soit $f_0 \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Alors pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on a :

$$|\Phi(f) - \Phi(f_0)| = |\int_0^1 f(x)^2 - f_0(x)^2 \, dx| \leq \int_0^1 |f(x) - f_0(x)||f(x) + f_0(x)| \, dx.$$

Donc

$$|\Phi(f) - \Phi(f_0)| \leq \|f - f_0\|_\infty \int_0^1 |f(x) + f_0(x)| \, dx \leq \|f - f_0\|_\infty \int_0^1 |f(x) - f_0(x) + 2f_0(x)| \, dx$$

Posons $K = \int_0^1 |2f_0(x)| \, dx$. On obtient donc

$$|\Phi(f) - \Phi(f_0)| \leq \|f - f_0\|_\infty (\|f - f_0\|_\infty + K)$$

Si $\|f - f_0\| < \eta$, on a donc $|\Phi(f) - \Phi(f_0)| \leq \eta(\eta + K)$. Puisque $\lim_{\eta \to 0} \eta(\eta + K) = 0$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|f - f_0\| < \eta$ implique $|\Phi(f) - \Phi(f_0)| < \epsilon$. Ceci montre la continuité de Φ en f_0 pour la norme $\|.\|_\infty$.

3. Maintenant, on munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_1$. Démontrer que Φ n'est pas continue en la fonction nulle. (*On pourra considérer la suite de fonctions* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \sqrt{n}(1 - nx)$ *si* $x \in [0, 1/n]$ *et* $f_n(x) = 0$ *si* $x \in [1/n, 1]$.)

Notons $\bar{0}$ la fonction nulle sur $[0,1]$. Alors on a $\Phi(\bar{0}) = \int_0^1 0^2 = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}\sqrt{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge vers $\bar{0}$ pour la norme $\|.\|_1$. Par ailleurs,

$$\phi(f_n) = \int_0^{1/n} (\sqrt{n}(1 - nx))^2 dx = n[-\frac{1}{3n}(1 - nx)^3] = 1/3.$$

Donc la suite $(\phi(f_n))_n$ ne converge pas vers $\Phi(\bar{0}) = 0$. Ceci montre que Φ n'est pas continue pour la norme $\|.\|_1$.

Exercice IV. **1.** Énoncer le théorème du point fixe pour une application contractante.

Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $f \colon E \to E$ une application strictement contractante, c'est-à-dire telle qu'il existe $k > 1$ vérifiant : pour tous $x, y \in E$, $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$.
Alors f admet un unique point fixe.

2. Déterminer les fonctions continues bornées de $[0, \frac{1}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}], \quad f(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt$$

Notons E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Par un théorème du cours, E est complet. Considérons l'application $\Phi \colon E \to E$ définie par : pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $\Phi(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt$. Trouver les solutions de l'équation fonctionnelle équivaut à trouver les points fixes de Φ.
Soient $f, g \in E$. Pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$|\Phi(f) - \Phi(g)| = |\int_0^x f(t) - g(t)dt| \leq \int_0^x |f(t) - g(t)|dt \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty.$$

Donc en passant au Sup à gauche,

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty.$$

Φ est donc contractante de rapport $\frac{1}{2}$ et comme E est complet, on en déduit que Φ admet un unique point fixe.
De plus, la fonction exponentielle est solution évidente de l'équation fonctionnelle. C'est donc son unique solution.

Problème

Soit ℓ^1 l'espace des suites de nombres réels dont la série converge absolument. On munit l'espace ℓ^1 de la norme $\| \ \|$ définie par

$$\forall X \in \ell^1, X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \|X\| = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|.$$

On admet que $(\ell^1, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé.

1. Pour un nombre entier p on considère la suite de nombres réels $A_p = (a_{p,n})_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ dont les $p+1$ premiers termes sont égaux à 1 et tous les termes suivants sont nuls.

a. Pour un nombre entier p, calculer $\|A_p\|$.

Calculons :

$$\|A_p\| = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,n} = \sum_{n=0}^{p} 1 = p + 1.$$

b. Pour deux nombres entiers $p \leq q$, calculer $\|A_q - A_p\|$.

De même nous calculons :

$$\|A_q - A_p\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{q,n} - a_{p,n}| = \sum_{n=p+1}^{q} 1 = q - p.$$

c. Démontrer que la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de ℓ^1 n'a pas de sous-suite convergente.

Soit $(A_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ une suite extraite. Alors pour tout entiers $p < q$, comme φ est strcitement croissante $\varphi(p) < \varphi(q)$ et donc d'après la question précédente $\|A_{\varphi(q)} - A_{\varphi(p)}\| = \varphi(q) - \varphi(p) \geq 1$. Ce qui contredit la propriété de Cauchy : la suite $(A_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy, elle n'est donc pas convergente.

2. En vous inspirant de la question précédente démontrer que la boule unité fermée de l'espace ℓ^1 n'est pas compacte.

Nous avons vu à la question précédente que la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ n'a pas de suite extraite convergente, mais elle ne reste pas dans la boule unité.
Pour un entier p considérons la suite de nombres réels $B_p = (b_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont nuls sauf le terme d'indice p qui est égal à 1. Deux rapides calculs montrent que $\|B_p\| = 1$ et donc que B_p est dans la boule unité fermée de l'espace ℓ^1. D'autre part, pour tout $p \neq q$, $|B_q - B_p| = 2$, ce qui suffit comme précédemment à démontrer que la suite de points de ℓ^1 n'a pas de sous-suite convergente.
Ce qui démontre que la boule unité fermée ne vérifie pas la propriété de Bolzano-Weierstrass et donc qu'elle n'est pas compacte.

3. On considère le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$ des suites de nombres réels $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nulles à partir d'un certain rang.

a. Pour chaque suite de nombres réels $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace ℓ^1 et pour chaque entier p, calculer la distance entre X et A_pX où A_pX est la suite de nombres réels $A_pX = (a_{p,n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les termes de A_pX sont les termes de la suite X jusqu'à l'indice p, puis ils sont tous nuls. Nous pouvons donc calculer :

$$\|A_pX - X\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{p,n}x_n - x_n| = \sum_{n=p+1}^{+\infty} |x_n|.$$

On reconnait le reste de la série convergente $\sum |x_n|$.

b. Soit $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels dans l'espace ℓ^1. Démontrer que la suite de points de ℓ^1 : $(A_pX)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers X.

La suite des restes d'une série convergente tend vers 0. Par comparaison, en utilisant la question précédente, nous obtenons

$$\lim_{p\to\infty} \|A_p X - X\| = 0.$$

Par définition de la convergence dans l'espace vectoriel normé ℓ^1, nous avons démontré que la suite $(A_p X)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers X.

c. En déduire que $\mathcal{P}$ est une partie dense de ℓ^1.

Pour chaque point X de ℓ^1 nous avons trouvé une suite $(A_p X)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers X. Bien sûr pour chaque entier p la suite de nombres réels $A_p X$ est nulle après l'indice $p+1$. C'est donc un point du sous-espace $\mathcal{P}$. Ce qui démontre que tout point X de ℓ^1 est dans l'adhérence du sous-espace $\mathcal{P}$. Et finalement que $\mathcal{P}$ est dense dans ℓ^1.