Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, 3e année
Topologie et analyse

Examen
lundi 9 janvier 2017

☐ Aix-Montperrin
☒ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Trois heures, ni calculatrices ni documents

Enseignant-es : T. Coulbois, L. Paoluzzi, A. Pichon

Exercice I.
1. la formule $d(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ définit-elle une distance sur $\mathbb{R}$?
2. Démontrer que deux métriques équivalentes définissent les mêmes ouverts.
3. Donner la définition de Borel-Lebesgue d'un espace compact.

Exercice II. Soit O une partie ouverte d'un espace métrique (E,d). Démontrer que pour toute partie A de E on a l'équivalence

$$A \cap O = \emptyset \iff \bar{A} \cap O = \emptyset.$$

Exercice III. On note $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application $\Phi : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \Phi(f) = \int_0^1 f(x)^2 \, dx$$

1. Rappeler les définitions des normes usuelles $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
2. On munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$. Démontrer que l'application Φ est continue sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
3. Maintenant, on munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_1$. Démontrer que Φ n'est pas continue en la fonction nulle. (*On pourra considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \sqrt{n}(1-nx)$ si $x \in [0,1/n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in [1/n,1]$.*)

Exercice IV. **1.** Énoncer le théorème du point fixe pour une application contractante.
2. Déterminer les fonctions continues bornées de $[0,\frac{1}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in [0,\frac{1}{2}], \quad f(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt$$

Problème

Soit ℓ^1 l'espace des suites de nombres réels dont la série converge absolument. On munit l'espace ℓ^1 de la norme $\| \ \|$ définie par

$$\forall X \in \ell^1, X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \|X\| = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|.$$

On admet que $(\ell^1, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé.

1. Pour un nombre entier p on considère la suite de nombres réels $A_p = (a_{p,n})_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ dont les $p+1$ premiers termes sont égaux à 1 et tous les termes suivants sont nuls.

a. Pour un nombre entier p, calculer $\|A_p\|$.

b. Pour deux nombres entiers $p \leq q$, calculer $\|A_q - A_p\|$.

c. Démontrer que la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de ℓ^1 n'a pas de sous-suite convergente.

2. En vous inspirant de la question précédente démontrer que la boule unité fermée de l'espace ℓ^1 n'est pas compacte.

3. On considère le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$ des suites de nombres réels $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nulles à partir d'un certain rang.

a. Pour chaque suite de nombres réels $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace ℓ^1 et pour chaque entier p, calculer la distance entre X et A_pX où A_pX est la suite de nombres réels $A_pX = (a_{p,n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Soit $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels dans l'espace ℓ^1. Démontrer que la suite de points de ℓ^1 : $(A_pX)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers X.

c. En déduire que $\mathcal{P}$ est une partie dense de ℓ^1.