

Questions de cours potentielles

Définitions et énoncés

- (1) Limites d'une suite, d'une fonction
- (2) Continuité d'une fonction
- (3) Continuité uniforme
- (4) Convergences simple et uniforme d'une suite de fonctions
- (5) Fonctions lipschitziennes
- (6) Borne supérieure (et inférieure)
- (7) Propriété de la borne supérieure
- (8) Distance, espace métrique
- (9) Norme et espace vectoriel normé
- (10) Distance et normes équivalentes
- (11) Boules
- (12) Voisinages
- (13) Ouverts et fermés
- (14) Caractérisation séquentielle d'un fermé
- (15) Intérieur
- (16) Adhérence
- (17) Topologie induite
- (18) Compact (deux définitions : BOREL-LEBESGUE et BOLZANO-WEIERSTRASS)
- (19) Théorème de ROLLE
- (20) Théorème de HEINE
- (21) En dimension finie :
 - (a) toutes les normes sont équivalentes
 - (b) les fermés bornés sont compacts
- (22) Connexe
- (23) Les connexes de \mathbb{R} sont les intervalles
- (24) Théorème des valeurs intermédiaires
- (25) Suites de CAUCHY
- (26) Espace complet
- (27) Espaces de fonctions
- (28) Fonction contractante

(29) Théorème de point fixe des fonctions contractantes

Preuves

- (1) Une suite convergente est de CAUCHY (contre-exemple : une suite de CAUCHY non-convergente)
- (2) Caractérisation séquentielle de la continuité
- (3) Une fonction lipschitzienne est uniformément continue
- (4) \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R}
- (5) Sur \mathbb{R}^2 les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$, $\| \cdot \|_\infty$ sont des normes.
- (6) Dans l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ comparer les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$.
- (7) La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue
- (8) Une réunion d'ouverts est ouverte
- (9) Une intersection finie d'ouverts est ouverte (contre-exemple pour une intersection infinie)
- (10) Une fonction est continue si, et seulement, si l'image réciproque de tout ouvert est ouverte
- (11) Caractérisation séquentielle d'un fermé
- (12) Une intersection de fermés est fermée
- (13) Une union finie de fermés est fermée
- (14) Deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts et les mêmes fermés
- (15) Deux normes équivalentes définissent les mêmes fonctions continues
- (16) Exemple de deux normes non équivalentes
- (17) La norme (réciproquement la distance) est une application lipschitzienne donc continue
- (18) L'image continue d'un compact est compacte
- (19) Un compact est fermé-borné et contre-exemple à la réciproque
- (20) Un fermé dans un compact est compact
- (21) Le produit cartésien de deux compacts est compact
- (22) L'image continue d'un connexe est connexe
- (23) Une partie compacte d'un espace vectoriel normé est complète
- (24) Une suite de CAUCHY qui a une sous-suite convergente est convergente
- (25) L'espace des fonctions continues définies sur un compact à valeurs dans un complet (muni de la norme uniforme) est complet
- (26) L'espace des fonctions continues muni de la norme L^1 n'est pas complet