**Exercice I.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. $f$ est majorée ;
2. $f$ est bornée ;
3. $f$ est paire ;
4. $f$ est impaire ;
5. $f$ ne s'annule jamais ;
6. $f$ est périodique ;
7. $f$ est croissante ;
8. $f$ est strictement décroissante ;
9. $f$ n'est pas la fonction nulle ;
10. $f$ n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
11. $f$ atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$ ;
12. $f$ est inférieure à g ;
13. $f$ n'est pas inférieure à g.

**Exercice II.** Montrer par contraposition les assertions suivantes, $E$ étant un ensemble :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

**Exercice III.**
Soit $A$ et $B$ deux parties bornées de $\mathbb{R}$. **Vrai** ou **faux** ?

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$,
2. $A \subset B \Rightarrow \inf A \leqslant \inf B$,
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leqslant \sup(A + B)$.

## Manipulation des $\varepsilon$

**Exercice IV.** On considère la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$. Pour $\varepsilon = 10^{-2}$ trouver $\eta$ tel que

$\forall x \in [0; +\infty[, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \varepsilon$ **1.** pour $x_0 = 1$ **2.** pour $x_0 = 0$

**3.** Montrer que la fonciton $\sqrt{\ }$ est uniformément continue sur $[0; +\infty[$

**Exercice V.** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue en 0.

**Exercice VI.** **1.** Trouver un disque de centre $(\frac{4}{5}, 0.9)$ inclus dans le carré unité.
**2.** Trouver un disque de centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ inclus dans le triangle équilatéral $0, 1, e^{i\frac{\pi}{3}}$.
**3.** On considère $\mathcal{P} = \{(x, y) \mid y > x^2\}$.
**a.** Faire un dessin.
**b.** Trouver un disque de centre $(1, 2)$ inclus dans $\mathcal{P}$.
**c.** Soit $A_0 = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{P}$. Trouver un disque de centre $A_0$ inclus dans $\mathcal{P}$ : vous exprimerez le rayon $r$ de ce disque en fonction de $x_0$ et $y_0$.
**4.** Reprendre la dernière question en remplaçant $\mathcal{P}$ par le carré unité et par le triangle équilatéral des questions précédentes.
**5.** Trouver une boule de centre $(1, 2, 3)$ incluse dans le cône $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < z^2\}$

## Limites, continuité, suites

**Exercice VII.** Montrer que la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ et $f(0) = 0$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice VIII.** On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $h(x) = 0$ pour tout $x$ irrationnel et $h(x) = \frac{1}{q}$ pour tout nombre rationnel $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$.
**1.** Montrer que $h$ est continue en tout point $x$ irrationnel.
**2.** Montrer que $h$ est discontinue en tout point $x$ rationnel.

**Exercice IX.** On considère la suite de terme générale $u_n = (-1) + \frac{1}{n}$. Montrer que cette suite diverge. Donner deux suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergent vers des limites différentes.

**Exercice X.** On considère la suite définie par récurrence : $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$.

**1.** Faire un dessin

**2.** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux suites extraites monotones.

**3.** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

## Normes, distances et boules

**Exercice XI.** On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions suivantes définies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\|x, y\|_1 = |x| + |y|, \quad \|x, y\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \|x, y\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$$

**1.** Montrer que ces trois fonctions sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.

**2.** Dessiner pour chacune d'entre elles la boule unité.

**3.** Décrire pour chacune d'entre elles la boule de centre 0 et de rayon $r$.

**4.** Comparer ces trois normes.

**5.** En déduire qu'elles définissent les mêmes ouverts de $\mathbb{R}^2$.

**Exercice XII.**
Les égalités suivantes définissent-elles des distances ? Si oui, décrire la boule de centre 0 et de rayon 1. Lesquelles sont issues d'une norme ?

a) $d(x, y) = |x - y|$ sur $\mathbb{R}$ ;

b) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$ sur $\mathbb{R}$ ;

c) $d(x, y) = |x^3 - y^3|$ sur $\mathbb{R}$ ;

d) $d(x, y) = |x^{-1} - y^{-1}|$ sur $\mathbb{R}^*$ (pour cette question vous décrirez la boule de centre 1 et de rayon 2) ;

e) $d(f, g) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ sur l'espace des fonctions bornées $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ ;

f) $d(f, g) = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ;

g) $d(f, g) = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$ sur l'espace des fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$.

**Exercice XIII.** 1) Soit $(X, d)$ un espace métrique. Montrer que $d' = \inf(1, d)$ fait de $X$ un espace métrique borné.
2) Soient $X = \mathbb{R}^n$ et $d = d_\infty$ la distance définie par $d_\infty(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|)$. Déterminer dans $(\mathbb{R}^2, d')$ les boules ouvertes et fermées.

**Exercice XIV.** *Comparaison de normes.*

**1.** Sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on définit les deux normes suivantes : $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, dx$ et $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Comparer ces deux normes.

**2.** Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables. On pose pour $f \in E$, $N(f) = (f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\, dt)^{1/2}$. Montrer que $N$ est une norme sur $E$ et la comparer à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

## Ouverts, fermés

**Exercice XV.** Démontrer que dans un espace métrique $(E, d)$, les boules fermées et les sphères sont des fermés.

## Adhérence, intérieure

**Exercice XVI.** Décrire l'intérieur, l'adhérence et la frontière des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $]0, 1]$ ; $]1, +\infty[$ ; $[0, 1] \cup \{2\}$ ; $\mathbb{Z}$ ; $\mathbb{Q}$ ; $\cup_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}]$.

**Exercice XVII.** Soit $A = ]0, 1[\cup]1, 2[\cup(\mathbb{Q}\cap]2, 3[) \cup \{4\}$. Déterminer $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}}$ et $\overline{\mathring{\overline{A}}}$.

**Exercice XVIII.** Dans $\mathbb{R}^2$ , nous considérons les ensembles suivants :

- le segment unité vertical : $I = \{0\} \times [0; 1]$
- le disque ouvert $D$ de centre $J = (0, 1)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

— le demi-cercle inférieur $S$ qui borde $D$ : $S = \{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$ et $y < 1\}$.

**1.** Faire un dessin.
**2.** $I$, $D$ et $S$ sont-ils ouverts ? Fermés ?
**3.** On considère $L = I \cup D \cup S$.
**a.** Décrire l'adhérence $\overline{L}$ et l'intérieur $\mathring{L}$ de $L$.
**b.** Comparer $\mathring{\overline{L}}$ et $\overline{\mathring{L}}$.
**4.** Soit $V_1(L) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \exists A \in L, d(M, A) < 1\ \}$.
**a.** Dessiner $V_1(L)$.
**b.** Montrer que $V_1(L)$ est ouvert.

**Exercice XIX.** **1.** Déterminer dans $\mathbb{R}$, l'intérieur, l'adhérence, la frontière de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ ainsi que de son complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
**2.** Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $I = ]\frac{1}{2}, 1[$
**3.** On considère $A = [0, 1[$ muni de la métrique induite par celle de $\mathbb{R}$. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $I$ comme partie de $A$.

**Exercice XX.** Décrire l'intérieur, l'adhérence et la frontière des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants : $\mathbb{Z}^2$ , $\mathbb{Q}^2$ , $S(a, r)$ , $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0,\ y = \sin \frac{1}{x}\}$
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0,\ y = x \sin \frac{1}{x}\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0,\ y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\}$ , $]0, 1[\times\{0\}$.

**Exercice XXI.** **1.** Démontrer qu'une sphère d'un espace vectoriel normé n'a aucun point intérieur.
**2.** Démontrer que si un sous-espace $F$ d'un espace vectoriel normé $E$ possède un point intérieur, alors $F = E$.

**Exercice XXII.** Vérifiez les égalités suivantes, pour des parties d'un espace métriques :

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B} \qquad \mathring{A} \cap \mathring{B} = \overbrace{A \cap B}^{o} .$$

Montrer que cela reste vrai pour une réunion finie d'adhérences et une intersection finie d'ouverts. Trouver un contre-exemple pour une réunion infinie d'adhérences et une intersection infinie d'ouverts.

**Exercice XXIII.** Soient $(E, d)$ un espace métrique, $A$ une partie de $E$ et $B$ une partie de $A$. On munit $A$ de la métrique induite par celle de $E$.
a) Montrer que l'intérieur de $B$ dans l'espace métrique $(A, d)$ contient l'intérieur de $B$ dans l'espace métrique $(E, d)$.
b) On suppose que $A$ est ouverte dans $(E, d)$. Montrer que l'intérieur de $B$ dans $(A, d)$ coïncide avec l'intérieur de $B$ dans $(E, d)$.

**Exercice XXIV.** Soit $O$ un ouvert d'un espace métrique $(E, d)$. Montrer que pour toute partie $A \subset E$, on a l'équivalence :

$$A \cap O = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A} \cap O = \emptyset .$$

**Exercice XXV.** Soit $F$ un fermé d'un espace métrique $(E, d)$. Montrer que pour toute partie $A$ de $E$ on a l'équivalence :

$$A \cup F = E \Longleftrightarrow \mathring{A} \cup F = E.$$

**Exercice XXVI.** Soit $U$ un ouvert d'un espace métrique. Montrer que la frontière de $U$ est d'intérieur vide.

**Exercice XXVII.** *distance à une partie* Soit $A$ une partie non vide d'un espace métrique $(X, d)$. Pour tout $x \in X$, on pose :

$$d_A(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, y) | y \in A\}$$

**1.** Soit $x \in X$. Montrer que $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$ .
**2.** Montrer que la distance à une partie $A$ coïncide avec la distance à l'adhérence $\overline{A}$ de $A$.
2. Pour $\varepsilon > 0$ on pose :

$$V_\varepsilon(A) = \{\ x \in X | d(x, A) < \varepsilon\}.$$

Montrer que $\overline{A} = \bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon(A)$.
3. Etant données deux parties non vides A et B de X, montrer que $d_A = d_B \iff \overline{A} = \overline{B}$ .

---

Consultez régulièrement `http://www.i2m.univ-amu.fr/~coulbois/2017/topo`.