Exercice 1. Soit dans un espace métrique (X, d) une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les trois sous-suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, et $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite elle-même converge.

Exercice 2. Soient f et g deux fonctions continues sur un espace métrique E à valeurs réelles.
1. Montrer que l'ensemble $\{x \in E \ / \ 0 < f(x) < 5\}$ est ouvert.
2. Montrer que l'ensemble $\{x \in E \ / \ g(x) \leq f(x)\}$ est fermé.

Exercice 3. Soient (E, d) un espace métrique et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in E \ / \ f(x) < \ell\}$ et $\{x \in E \ / \ f(x) > \ell\}$ sont des ouverts de E.

Exercice 4. **1.** Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Plus généralement montrer que l'ensemble des matrices de rang $\geq r$ (avec $0 \leq r \leq n$) est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $GL_n(R)$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$ (considérer la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto \det(M + tI_n)$ pour $M \in M_n(\mathbb{R})$).

Exercice 5. Soit $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction continue vérifiant $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (1, 1)$. Montrer que l'image de γ rencontre le cercle unité S^1 ainsi que le losange L de sommets $(\pm 1, 5, 0)$ et $(0, \pm 1, 5)$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
1. Montrer que le graphe de f est un fermé de $(R^2, \| \cdot \|_\infty)$.
2. Est-ce que la réciproque est vraie ? (considérer la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$)

Exercice 7.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de réels $x_n = (1 + \frac{1}{n}) \sin(n\frac{\pi}{6})$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si α est irrationnel. En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $x_n = \cos(2\pi n\alpha)$.
   (*Indication :* on pourra montrer que tout sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ est soit $\mathbb{R}$, soit discret, de la forme $a\mathbb{Z}$.)
3. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Une période de f est un réel T tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des période de f est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
4. On suppose que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et que $T > 0$ est une période de f. Montrer que si f n'est pas constante, alors le groupe des périodes de f est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Donner un exemple de fonction non continue admettant un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$ comme groupe de périodes.

Exercice 8. Soit E un espace métrique et $(a_n)_n$ une suite de E. Pour tout entier n on pose

$$A_n := \{a_m \ / \ m \geq n\}.$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (a_n) est $\bigcap_{n\geq 0} \overline{A}_n$. en déduire que cet ensemble est fermé.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) := \frac{x - y}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f(0, 0) = 0.$$

Cette application est-elle continue ?

Exercice 10.

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que e^{iu_n} et $e^{i\sqrt{2}u_n}$ convergent. Montrer que (u_n) a au plus une valeur d'adhérence.
2. Soit (u_n) une suite réelle telle que e^{itu_n} converge pour $t \in T$ où T est non dénombrable. Même conclusion.

Exercice 11. *Graphe d'une application continue.*
Soit $f : (X, d) \to (X', d')$ continue.
1) Montrer que le graphe de f est fermé dans $X \times X'$ et homéomorphe à X.
2) Soit $g : (X, d) \to (X', d')$ également continue. Montrer que $\{ \ x \in X \ \ / \ \ f(x) = g(x) \ \ \}$ est fermé dans X.

Exercice 12. Montrer que la propriéte de continuité d'une application entre espaces métriques est conservée en remplaçant la métrique par une métrique équivalente, aussi bien à la source qu'au but de l'application.

Exercice 13. On considère un espace verctoriel normé $(E, \| \cdot \|)$.
1) Vérifier que $x \mapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|}$ réalise un homéomorphisme de E sur la boule unité ouverte de E. Expliciter l'homéomorphisme réciproque.
2) Montrer que la boule unité ouverte pour la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$, $B = \{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \ \}$ est homéomorphe au cube ouvert $C = \{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \sup(|x|, |y|, |z|) < 1 \ \}$. Expliciter cet homéomorphisme.
3) Même question pour la boule et le cube fermés. En déduire que la sphère unité et le bord du cube sont homéomorphes. On explicitera l'homéomorphisme.

Exercice 14. *Formes linéaires continues et hyperplans fermés.*
E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
1) Soit f une forme linéaire non nulle sur E et H son noyau. Montrer qu'il existe $a \in E$, $a \neq 0$, tel que $E = H \oplus \mathbb{R}a$. Réciproquement, si H est un sous-espace vectoriel de E qui admet un supplémentaire de dimension un, montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle sur E de noyau H.
2) Montrer qu'une forme linéaire non nulle sur E est continue si et seulement si son noyau est fermé. Indication : on pourra montrer que si $f(a) > 0$ alors il existe $\rho > 0$ tel que $\forall y \in B(a, \rho), f(y) > 0$, puis que f est bornée sur $B(0, \rho)$.
3) Soit H un hyperplan fermé de E et a un vecteur de E n'appartenant pas à H. Montrer que E est somme directe topologique de H et de $\mathbb{R}a$ (i.e. par définition que les deux projecteurs associés à la somme directe sont continus).
4) Montrer qu'un hyperplan H est sous-espace vectoriel de E maximal pour l'inclusion. En déduire qu'un hyperplan est soit fermé soit dense dans E.
5) Soit H un hyperplan fermé et f une forme linéaire continue associée (pourquoi **une** ?). Montrer que pour tout $a \in E$, on a $d(a, H) = \dfrac{|f(a)|}{\|f\|}$.

Exercice 15. Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application continue surjective et A une partie dense de E. Montrer que $f(A)$ est dense dans F.

Exercice 16. Soit (E, d) un espace métrique.
1. Pour toute partie A non vide de E, montrer que l'application

$$d_A : x \mapsto d_A(x) = d(x, A)$$

est continue de E dans $\mathbb{R}$.
2. Soient F et G deux fermés disjoints de E. En utilisant les fonctions d_F et d_G, construire une fonction continue f de E dans $[0, 1]$ qui vaut 0 sur F et 1 sur G.

Exercice 17. Montrer que les projections π_E et π_F de $E \times F$ sur E et F respectivement sont continues. Montrer qu'une application $f : G \longrightarrow E \times F$ est continue si et seulement si $\pi_E \circ f$ et $\pi_F \circ f$ le sont.
En déduire que si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux applications continues, alors la fonction $h : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = \sin(f(x)^2 g(y)^3)$ est continue.

Exercice 18. Soient E et F deux espaces métriques et une application $f : E \longrightarrow F$. Montrer que f est continue si et seulement si pour toute partie A de E on $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe deux constantes positives a et b telles que

$$|f(x)| \leq a\|x\| + b \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 20. Soit E un ensemble muni de la métrique discrète : $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. Quelles sont ses parties compactes ? Quelles sont ses parties fermées et bornées.

Exercice 21. Soit K une partie compacte incluse dans le demi-plan supérieur de $\mathbb{R}^2$: $K \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\}$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in K$ on ait $y \geq r$

i) en utilisant la propriété de Bolzano-Weierstrass,

ii) en considérant les parties $\{(x,y) \in K \ / \ y > t\}$.

La proprété reste-t-elle vraie si l'on suppose uniquement K fermé ?

Exercice 22. Montrer que $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ M^t M = I_n\}$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 23. Soit K un espace métrique compact.

i) Montrer qu'une suite (u_n) dans K converge si et seulement si elle admet au plus une valeur d'adhérence.

ii) Soient (u_n) et (v_n) deux suites dans $[0,1]$. Supposons que la suite $(u_n v_n)$ converge vers 1. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 24. Montrer que l'ensemble formé des termes d'une suite convergente et de sa limite est un ensemble compact.

Exercice 25. Soit E un espace métrique et soient A et B deux parties de E. On définit

$$d(A,B) := \inf\{d(x,y) \ /x \in A, y \in B\}.$$

Montrer que si A et B sont disjointes et compactes alors $d(A,B) > 0$. Montrer que cela reste vrai si on suppose seulement que A est compacte et B fermée. Montrer que cela est faux si on suppose seulement A et B fermées.

Exercice 26. Soit X un espace métrique.

i) Soit (F_n) une suite décroissante de fermés non vide de X et soit (x_n) une suite convergente de X telle que $x_n \in F_n$ pour tout entier n. Montrer que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n \in \bigcap_{n \geq 0} F_n.$$

Donner un exemple où $\bigcap_{n \geq 0} F_n = \emptyset$.

ii) Soit (K_n) une suite décroissante de compacts non vides de X. Montrer que $K = \cap K_n$ est non vide et que si Ω est un ouvert contenant K, il contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

Exercice 27. Soit E est un espace vectoriel normé. Si A et B sont deux parties de E on note $A + B$ l'ensemble $\{a + b \ /a \in A, \ b \in B\}$.

i) Montrer que si A est fermée et B est compacte alors $A + B$ est fermée.

ii) Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}$ dont la somme n'est pas fermée.

Exercice 28. Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E tel que $0 \notin K$. Notons

$$F = \{\ell x \ / \ \ell \in \mathbb{R}^+, x \in K\}.$$

Montrer que F est fermé.

Exercice 29. Soient A une partie compacte d'un espace métrique (E,d) et $f : A \longrightarrow A$ telle que : $\forall x, \, y \in A, \, x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x,y)$.

i) Montrer que f admet un unique point fixe $a \in A$.

ii) Soit (x_n) une suite d'éléments de A telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier n. Montrer que cette suite converge vers a.

Exercice 30. Soit K un espace métrique compact et soit $f : K \longrightarrow K$.

i) On suppose que pour tous x, $y \in K$, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Montrer que f est surjective. (Indications : étudier la suite $(f^n(x))_n$)

ii) On suppose que pour tous x, $y \in K$, $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ et que f est continue. Montrer que f est une isométrie surjective.

Exercice 31. Soit X un espace topologique compact et $C(X)$ l'espace des fonctions réelles continues sur X avec la norme uniforme.

Soit J un idéal propre de $C(X)$; on va montrer par l'absurde que toutes les fonctions de J s'annulent en un même point de X.

1. Sinon, montrer qu'on peut trouver n points de X, $x_1, \cdots, x_n$, $V_1, \cdots, V_n$ où V_i voisinage de x_i et n fonctions de J, $f_1, \cdots, f_n$ tels que
$$X = \cup_i V_i, \quad f_{i|V_i} \neq 0.$$
2. Construire alors une fonction g dans J ne s'annulant jamais et en déduire que $\mathbf{1} \in J$, d'où la contradiction.

Exercice 32. Soit $S^2_+ := \{(x, y, z) \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0\}$ l'hémisphère supérieur de la boule unité dans $\mathbb{R}^3$. On note $i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2_+$ l'application qui associe au point de coordonnées (x, y) le point de S^2_+ sur la droite reliant $(1, x, y)$ à l'origine de $\mathbb{R}^3$

i) Vérifier que $i(\mathbb{R}^2)$ est dense dans S^2_+ et que i est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $i(\mathbb{R}^2)$ (muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^3$ sur S^2_+). On dit que la donnée de (i, S^2_+) est une compactification de $\mathbb{R}^2$.

ii) À quelle condition une suite $(i(x_n, y_n))$ converge-t-elle vers le point de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ de S^2_+ ?