Espaces complets

Exercice 1. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans un espace métrique quelconque. Montrer que cette suite converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

Exercice 2. *Une métrique complète sur* $\mathbb{N}$.
Soit $a > 0$ quelconque. On définit d par $d(m,n) = a + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}$, pour $m \neq n$ et $d(n,n) = 0$. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}$, et que $(\mathbb{N}, d)$ est complet.

Exercice 3. *Une métrique non complète sur* $\mathbb{R}$.
Montrer que $d(x,y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$ définit une distance sur $\mathbb{R}$ et que l'espace $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet (on pourra considérer la suite $u_n = n$ et se rappeller que $\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$).

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application injective. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on définit $d(x,y) = \|f(x) - f(y)\|$. Montrer que $(\mathbb{R}, d)$ est complet si et seulement si $f(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ *n'est pas complet*
Trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit de Cauchy dans $E := (C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ et qui ne converge pas dans E. (On pourra, pour chaque n, couper $[0,1]$ en trois intervalles tels que f_n soit nulle sur le premier, affine sur le second et égale à 1 sur le troisième).

Exercice 6. *Non équivalence des normes* $\|\cdot\|_\infty$ *et* $\|\cdot\|_1$ *sur* c_{00}
On considère l'espace des suites de nombres réels :

$$c_{00} := \{X = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; x_i = 0 \text{ à partir d'un certain rang}\}.$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de points de c_{00} , telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $X_n = (x_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par

$$\begin{cases} x_{n,i} = (1+i)^{-1} \text{ pour } i < n, \\ x_{n,i} = 0 \text{ pour } i \geq n. \end{cases}$$

Soient $E_\infty = (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ et $E_1 = (c_{00}, \|\cdot\|_1)$. Montrer que (X_n) est une suite de Cauchy dans E_∞ et pas dans E_1. En déduire que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes sur l'espace c_{00}.

Exercice 7. Soient K un espace métrique compact et F un espace métrique complet. On note $C^0(K,F)$ l'ensemble des fonctions continues de K vers F que l'on munit de la distance suivante :

$$d(f,g) := \sup_{x\in K} d_F(f(x), g(x)).$$

Montrer que $(C^0(K,F), d)$ est un espace métrique complet.

Exercice 8. $E_\infty = (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ *et* $E_1 = (c_{00}, \|\cdot\|_1)$ *ne sont pas complets*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X_n = (x_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$, la suite de points de l'espace c_{00} définie par

$$\begin{cases} x_{n,i} = 2^{-i} \text{ pour } i \leq n, \\ x_{n,i} = 0 \text{ pour } i > n. \end{cases}$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E_1 et en déduire qu'elle l'est aussi dans E_∞.
2. Montrer que E_∞ n'est pas complet et en déduire que E_1 ne l'est pas non plus.

Exercice 9. *$E = (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est complet*
On pose
$$c_0 := \{X = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \; l \; \lim_{i\to\infty} x_i = 0\}$$
1. Montrer que c_0 est une partie fermée de l^∞. En déduire que E est complet.
2. Montrer que c_{00} est dense dans E. En déduire une nouvelle démonstration de l'exercice précédent.
3. Montrer que tout élément $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de c_0 est somme de la série de terme général $x_n e_n$ où $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de c_0.

Exercice 10. *l^p est complet*
1. Montrer que l'espace $(l^p, \|\cdot\|_p)$, où p est un réel ≥ 1, est complet.
2. Montrer que tout élément $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l^p est somme de la série de terme général $(x_n e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de l^p.

Exercice 11. *$E = (c, \|\cdot\|_\infty)$ est complet*
On désigne par c le sous-espace de l^∞ formé des suites convergentes. Montrer que c est une partie fermée de l^∞ muni de la norme infinie (par exemple, raisonner en $\varepsilon/3$) et donc que E est complet.

Exercice 12. *Extension du théorème du point fixe*
Soient E un espace métrique complet et $f : E \to E$ tels que pour un entier $p > 0$ la fonction f^p soit une contraction.
1. Montrer que f possède un point fixe.
2. Montrer que ce point fixe est unique. On le note a.
3. Montrer que a est la limite de la suite définie par $x_{k+1} = f(x_k)$ où x_0 est un point arbitraire de E.

Exercice 13. *Une application du théorème du point fixe.* Soient $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et ε un réel tel que $0 < \varepsilon \leq 1$. On pose $I = [0, \varepsilon]$ et $B = \{y \in \mathbb{R}^n; \|y - y_0\| \leq 1\}$. L'espace $E = C(I, B)$ est muni de la distance induite par la norme uniforme sur $C(I, \mathbb{R}^n)$.
1. Montrer que (E, d) est un espace métrique complet.
2. A tout $f \in E$ on associe $G(f)$ défini par
$$G(f)(t) = y_0 + \int_0^t e^s f(s)\, ds, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon.$$
Si ε est assez petit montrer que $G(E) \subset E$ et que l'application G est contractante. Déterminer alors le point fixe de G.

Connexité

Exercice 14. Soit A une partie connexe d'un espace métrique X. Montrer que toute partie B telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.

Exercice 15.
1. Soient A et B deux parties connexes telles que $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.
2. On suppose maintenant que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.

Exercice 16. Déterminer les parties connexes de $\mathbb{Q}$.

Exercice 17. Montrer que
1) $[0, 1]$ et un cercle de $\mathbb{R}^2$ ne peuvent pas être homéomorphes,
2) $[a, b[$ et $]a, b[$ ne peuvent pas être homéomorphes.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. Nous voulons montrer que f est strictement monotone.

1. Montrer que l'ensemble $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / x > y\}$ est connexe.
2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = f(x) - f(y)$. Montrer que $F(C)$ est connexe et que $0 \notin F(C)$.
3. En déduire que $F(C) \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
4. Conclure.

Exercice 19. On considère le graphe de la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$: $\mathcal{G} = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$.

1. Déterminer l'adhérence $\bar{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$.
2. Montrer que $\bar{\mathcal{G}}$ est connexe

Exercice 20. Montrer que, dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension au moins deux, toute sphère est connexe par arcs. En déduire que si $C \subset E$ est convexe borné alors $E \setminus C$ est connexe par arcs.

Exercice 21. Soit $M_n(\mathbb{C})$ (respectivement $M_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$), et soit $GL_n(\mathbb{C})$ (resp. $GL_n(\mathbb{R})$) celles de déterminant non-nul. On considère M_n comme espace vectoriel normé avec n'importe quelle norme.

1) Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ et $P(z)$ le polynôme $P(z) = \text{dét}(Az + (1 - z)B)$.

Montrer que $0, 1$ ne sont pas des racines de $P(z)$.

Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. (On admet que $\mathbb{C}$ privé d'un ensemble fini est connexe par arcs.)

2) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

3) Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe

Exercice 22. Montrer que $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs. Soit A une partie discrète de $\mathbb{R}^2$, montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ est connexe par arcs.