Faculté des sciences
Université d'Aix-Marseille

Examen
jeudi 8 mars 2018

Mathématiques discrètes, master de mathématiques, 1re année, Thierry Coulbois

Exercice I. La courbe de Péano. On considère l'écriture décimale admissible d'un nombre réel $x \in [0;1[$: $x = 0,c_{-1}c_{-2}c_{-3}\dots$ et on définit $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k+1}10^{-k-1}$ et $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k}10^{-k}$.

1. Démontrer que les deux séries ci-dessus sont convergentes et que $f(x)$ et $g(x)$ sont dans $[0;1]$.

2. Donner un nombre réel $x \in [0;1[$ tel que $f(x) = 1$.

3. a. Donner l'écriture décimale de $\frac{2}{7}$.

b. Calculer $f(\frac{2}{7})$ et $g(\frac{2}{7})$. *(Vous donnerez l'écriture décimale des résultats ainsi que sous forme de fraction rationnelle.)*

4. On considère l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} [0;1[& \to & [0;1]\times[0;1] \\ x & \mapsto & \varphi(x) = (f(x), g(x)) \end{array}$.

a. Calculer $\varphi(\frac{3}{11})$ **b.** Trouver un antécédent de $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$.

c. Démontrer que l'image de φ est $([0,1]\times[0;1]) \setminus \{(1,1)\}$ **d.** Démontrer que φ n'est pas injective.

e. **(∗Difficile∗)** Démontrer que φ est continue.

Exercice II. On considère la racine positive α de l'équation $x^2 + x - 5 = 0$.

1. Donner le développement en fractions continues de α.

2. Écrire sous la forme $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $c, d \in \mathbb{N}^*$, le nombre x donc le développement en fractions continues est

$$x = [1;1,2,1,2,1,2,\dots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

Exercice III. Fractions continues et équation de Pell-Fermat. Considérons un nombre irrationnel x et son développement en fractions continues $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}^*$. Considérons aussi les réduites $(\frac{p_n}{q_n})_{n\geq -2}$ de cette fraction continue et rappelons que nous avons démontré dans le cours que

$$\left\{\begin{array}{ll} p_{-2} = 0 & p_{-1} = 1 \\ q_{-2} = 1 & q_{-1} = 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \end{array}\right. , \quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}}.$$

1. Question préliminaire. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}}$.

a. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ est alternée.

b. En déduire que la majoration de la somme des restes : $|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k| < \frac{1}{q_nq_{n+1}}$

Pour un entier $m \in \mathbb{N}^*$ on considère $k = m^2 + 1$ et le développement en fractions continues $x = \sqrt{k} = [a_0; a_1, a_2, \dots]$.

2. Calculer $a_0, a_1, a_2, \dots$.

3. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $(kq_n^2 - p_n^2) = (-1)^n$.

4. Vérifier que la réduite du développement en fractions continues de $\sqrt{10}$ à l'étape $n = 3$ est $\frac{p_3}{q_3} = \frac{721}{228}$

Le nombre $519\,841 = 721^2$ est obtenu en ajoutant un 1 à droite de l'écriture décimale du nombre $51\,984 = 228^2$. Remarquons que ces deux nombres sont des carrés parfaits.

5. Comment trouver un autre carré parfait tel que si on ajoute un chiffre 1 à droite de son écriture décimale on trouve un carré parfait ? *(On ne demande pas de mener les calculs jusqu'au bout, mais plutôt de donner des éléments de démonstrations.)*

Exercice IV. 1. Vérifier que dans le groupe libre F sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$

$$x^{-1}y^{-1}xy = (x^{-1})^2(xy^{-1}x^{-1})^2(xy)^2$$

2. En utilisant la propriété universelle des groupes libres en déduire que tout groupe d'exposant 2 est commutatif *(Rappel : un groupe G est d'exposant 2 si pour tout élément $g \in G$, $g^2 = e$, où e est l'élément neutre de G.)*

Exercice V. On considère la substitution $\sigma : a \mapsto bab, b \mapsto babb$, et les itérés successifs $\sigma^n(b)$.

1. Calculer $\sigma^2(b)$ et $\sigma^3(b)$.

2. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma^n(b)|_a}{|\sigma^n(b)|_b} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (où $|w|_a$ est le nombre d'occurences de la lettre a dans le mot w.