Faculté des sciences
Université d'Aix-Marseille

Examen
jeudi 8 mars 2018

Mathématiques discrètes, master de mathématiques, 1re année, Thierry Coulbois
Trois heures, ni calculatrices, ni documents.

Exercice I. **1.** Nous considérons la fonction ci-contre écrite en `C`. Nous rappelons que pour deux entiers (`int`), `a` et `b`, `a/b` est le quotient de la division euclidienne et `a%b` le reste.

a. En précisant vos caculs intermédiaires donner le résultat de `affiche_ternaire(2,5,10);`

b. L'appel de la fonction `affiche_ternaire(p,q,10);` affiche `0,1202020202`. Quelles étaient les valeurs des paramètres `p` et `q` ?

c. Démontrer que la fonction affiche les `precision` premiers chiffres de l'écriture en base 3 du nombre rationnel $x = \frac{p}{q}$.

```
affiche_ternaire(int p, int q, int precision){
   int i;
   printf("0,");

   for(i=0;i<precision;i++){
      printf("%d",(3*p)/q);
      p = (3*p)%q;
   }
}
```

2. **a.** Démontrer que la longueur de la période de l'écriture en base 3 d'un nombre rationnel de la forme $\frac{p}{13}$ est 3 (avec p premier avec 13).

b. Soit x un nombre dont l'écriture en base 3 est périodique de période ℓ : $x = \overline{0, c_1 c_2 \dots c_\ell c_1 c_2 \dots c_\ell \dots}^3$. Démontrer que x est un nombre rationnel de la forme $\frac{p}{q}$ où q est un diviseur de $3^\ell - 1$.

c. Proposer une modification du programme pour qu'il affiche la longueur de la période de l'écriture en base 3 de $\frac{p}{q}$.

3. Pour un nombre dont l'écriture admissible en base 3 est $x = \overline{0, c_1 c_2 c_3 \dots}^3$, nous définissons $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n 2^{-n}$.

a. Démontrer que la série qui définit $f(x)$ est convergente et que $f(x) \in [0;1]$.

b. Soit x un nombre rationnel. Démontrer que $f(x)$ est rationnel.

c. Démontrer que la fonction f n'est pas croissante.

d. Démontrer que la fonction f n'est pas injective.

e. Démontrer que la fonction f n'est pas continue.

Exercice II. On considère la racine positive α de l'équation $2x^2 + 2x - 7 = 0$.

1. Donner le développement en fractions continues de α.

2. Écrire sous la forme $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $c, d \in \mathbb{N}^*$, le nombre x donc le développement en fractions continues est

$$x = [2; 3, 1, 3, 1, 3, 1, \dots] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}}}$$

Tournez la page SVP

Pour l'exercice qui suit, on rappelle le théorème de Perron-Frobenius :

Théorème. *Soit M une matrice à coefficients positifs telle qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel la matrice M^n est à coefficients strictement positifs. Alors M possède une valeur propre dominante $\lambda > 0$ associée à un vecteur propre X_λ à coordonnées strictement positives. De plus pour tout vecteur Y à coordonnées positives $AY \leq \lambda Y$.*

Exercice III. **1.** On considère le groupe libre $F_{\mathcal{A}}$ sur l 'alphabet $\mathcal{A} = \{x, y, z\}$. Soit l'homomorphisme de groupes

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & F_{\mathcal{A}} & \to & F_{\mathcal{A}} \\ & x & \mapsto & z \\ & y & \mapsto & z^{-1}x \\ & z & \mapsto & z^{-1}y \end{array}.$$

a. Calculer $\varphi(xyxzzxyx)$, $\varphi^2(xyxzzxyx)$ et $\varphi^3(xyxzzxyx)$.
b. Calculer $\varphi^3(x)$.
2. Pour un mot réduit $w \in F_{\mathcal{A}}$ on considère son vecteur de Parikh $p(w) \in \mathbb{N}^3$ dont les coordonnées sont la somme des occurences de chaque lettre de l'alphabet et de son inverse :

$$p(w) = \begin{pmatrix} |w|_x + |w|_{x^{-1}} \\ |w|_y + |w|_{y^{-1}} \\ |w|_z + |w|_{z^{-1}} \end{pmatrix} \text{ par exemple } p(xyx^{-1}z^{-3}xz^{-1}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a. Démontrer que p n'est pas un homomorphisme de groupes.
b. Trouver une matrice A à coefficients positifs telle que pour tout mot réduit $w \in F_{\mathcal{A}}$, $p(\varphi(w)) \leq Ap(w)$.
c. Soit λ la valeur propre dominante de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant le théorème de Perron-Frobenius, démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|\varphi^n(x)| \leq \lambda^n$.
d. Trouver une matrice B à coefficients positifs, strictement plus petite que A^2 telle que pour tout mot réduit $w \in F_{\mathcal{A}}$, $|p(\varphi^2(w))| \leq Bp(w)$.
e. Démontrer que φ est un automorphisme de $F_{\mathcal{A}}$. *(Vous pourrez calculer l'automorphisme inverse).*