Faculté des sciences
Université d'Aix-Marseille

Première feuille d'exercices
jeudi 22 février 2018

Mathématiques discrètes, master de mathématiques, 1re année, Thierry Coulbois

Exercice I. Systèmes de numérations.

1. Écrire en binaire (base 2) puis en base 3 le nombre dont l'écriture décimale est 2018.

2. Écrire en héxadécimal le nombre 352.

3. Donner l'écriture décimale des nombres dont l'écriture binaire est `0b1001101` et dont l'écriture hexadécimale est `0x9C`. *Ici nous avons utilisé les notations informatiques standard :* `0x...` *désigne l'écriture hexadécimale d'un nombre et* `0b...` *désigne l'écriture binaire.*

4. Sauriez-vous expliciter les règles d'addition et de multiplication entre deux nombres donnés par leur écriture décimale : $c_3c_2c_1c_0, c_{-1}c_{-2}$ et $d_2d_1d_0, d_{-1}d_{-2}$?

Exercice II. Développement décimal des nombres rationnels.

1. Écrire sous forme de somme d'une série géométrique le nombre $17,1717171717\dots$, en déduire son écriture fractionnelle.

2. Déterminer le nombre rationnel dont l'écriture décimales est $r = 1,32323232\dots$

3. Remarquez que 99 999 est divisible par 271 et que la période de $54/271$ est de longueur 5. Pourriez-vous énoncer une conjecture sur la longueur de la période en fonction des diviseurs de $999\dots99$? Sauriez-vous démontrer ce résultat ?

Exercice III. Développement décimal des nombres réels.

1. Soit x le nombre réel de partie entière 0 et dont le développement décimal ne contient que des 0 sauf les chiffres dont la position est une puissance de 2 qui sont des 1 : $x = 0,110100010000000100\dots$. Soit n un nombre entier à d chiffres. Pour $k > d+1$, quel est le $(2^k - d + 1)$-ième chiffre de nx ? En déduire que x est irrationnel.

2. On désigne par X l'ensemble des nombres réels dont le développement décimal propre contient le chiffre 9. Construire une suite convergente d'éléments de X dont la limite n'appartient pas à X.

Exercice IV. Compacité de l'intervalle $[0;1]$**.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels entre 0 et 1. Pour chaque n, on considère l'écriture décimale de x_n :

$$x_n = 0, c_{n,1}c_{n,2}c_{n,3}\dots$$

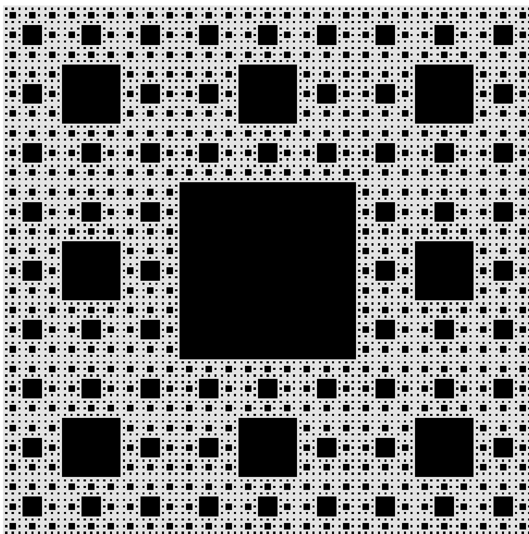
où $c_{n,i} \in \{0;1;\dots;9\}$ est le i-ème chiffre après la virgule de x_n.

1. Construire par récurrence sur n, une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que pour tout n et pour tout $k, m \leq n$, $c_{\varphi(n),k} = c_{\varphi(m),k}$

2. Démontrer que la suite de nombres réels $x_{\varphi(n)}$ converge vers le nombre réel $y = 0, c_{\varphi(0),0}c_{\varphi(1),1}c_{\varphi(2),2}c_{\varphi(3),3}\dots$

3. Que se passe-t-il si la suite des chiffres $(c_{\varphi(n),n})_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement égale à 9 ?

Exercice V. Variantes de l'ensemble de Cantor.

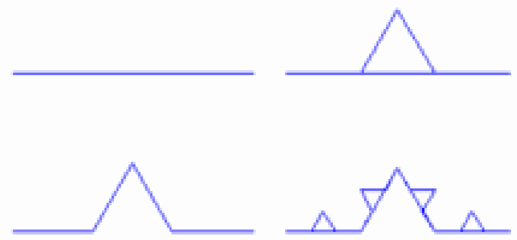


1. Le tapis de Sierpinsky est obtenu en partant du carré unité $[0;1]\times[0;1]$ auquel on enlève le carré central $[\frac{1}{3};\frac{2}{3}]\times[\frac{1}{3};\frac{2}{3}]$. Il reste alors huit carrés et de chacun de ces huit carrés on enlève le carré central : $[\frac{1}{9};\frac{2}{9}]\times[\frac{1}{9};\frac{2}{9}]$, $[\frac{1}{9};\frac{2}{9}]\times[\frac{4}{9};\frac{5}{9}]$, etc.

a. Estimez l'aire restante à chaque étape et à la limite l'aire du tapis de Sierpinsky.

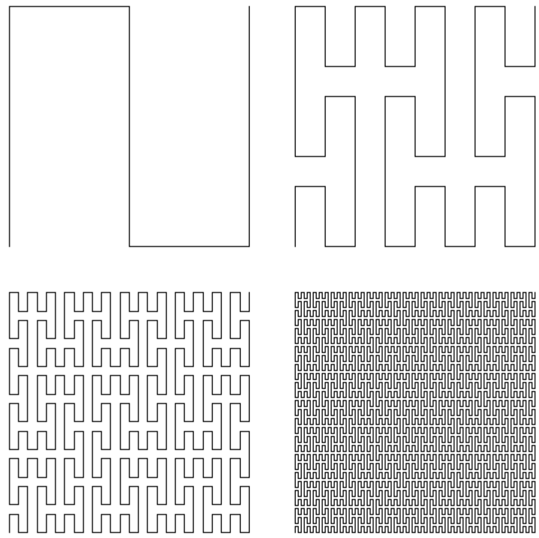
b. Trouvez un segment qui ne sera jamais effacé, qui est donc inclus dans le tapis de Sierpinsky. En déduire que le tapis de Sierpinsky contient autant de point que le plan.

2. Le flocon de Koch est au contraire construit à partir d'un segment que l'on partage en trois et dont le tiers du milieu est remplacé par un chapeau.
a. Estimez la longueur du dessin obtenu au bout de 1, 2, 3 étapes. Puis n étape.
b. Si on passe à la limite (mais quel sens donner à cette limite ?), quelle serait la longueur de la courbe du flocon de Koch ?



Les quatre premières étapes

Exercice VI. Remplir le carré : la courbe de Péano. La courbe de Péano se construit un peu comme le flocon de Koch, ou bien en utilisant l'écriture des nombres en base 3 comme l'ensemble de Cantor. Elle a la propriété de remplir le carré.



Exercice VII. L'addition des cancres
1. Soit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ deux fractions : $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$. On suppose de plus que $bc - ad = 1$.
a. Démontrer que les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont réduites.
b. Démontrer que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

c. Démontrer que $\frac{a+c}{b+d}$ est réduite.
2. Pour deux fractions fractions réduites $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on note $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Montrer que cette opération n'est pas associative.
3. En partant d'un encadrement $\frac{a}{b} < \pi < \frac{c}{d}$, l'un des deux encadrements $\frac{a}{b} < \pi < \frac{a+c}{b+d}$ ou $\frac{a+c}{b+d} < \pi < \frac{c}{d}$ est vrai. On dit qu'il est obtenu par addition des cancres.
En partant de l'encadrement $\frac{3}{1} < \pi < \frac{4}{1}$ donner les encadrements successifs de π obtenus par addition des cancres.
4. a. Soit x un nombre réel compris entre deux nombres rationnels strictement positifs $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ avec $bc - ad = 1$. Démontrer que l'un des trois nombres rationnels $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$, noté $\frac{p}{q}$, vérifie

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2\sqrt{5}}.$$

b. En déduire le théorème de Hurwitz : Étant donné un irrationnel x, il existe une infinité de nombres rationnels $\frac{p}{q}$ tels que

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2\sqrt{5}}.$$

Exercice VIII. Fractions continues
1. Tracer la courbe représentative de la fonction $[0;1] \to [0;1]$, $x \mapsto \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.
2. Démontrer que les nombres rationnels $[1]$, $[1;1]$, $[1;1,1]$, $[1;1,1,1]$, etc. sont les quotients de termes consécutifs dela suite de Fibonacci.
3. Donner le développement en fractions continues de $\sqrt{2}$.
4. Développer $14/9$, $34/13$, $2015/42$ en fractions continues.
5. Développer $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ et plus généralement $\sqrt{n^2+1}$ pour n entier.
6. On considère le nombre x dont le développement en fraction continue est $[1; 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots]$. Trouver des nombres entiers a, b, c, d tels que $x = \frac{a+b\sqrt{c}}{d}$.