Deuxième feuille d'exercices
mercredi 28 février 2018

Mathématiques discrètes, master de mathématiques, 1re année, Thierry Coulbois

Exercice I. **1.** Trouver tous les mots $u \in \{a,b\}^*$ tels que $abubu = ububa$.
2. **Théorème de Lyndon-Schützenberger.** Soit $m,n,p \geq 2$ démontrer que si x,y,z sont des mots sur un alphabet $\mathcal{A}$ tels que $x^m = y^n z^p$ alors il existe un mot w dont x, y et z sont des puissances. *Vous pourrez commencer par le cas plus facile $m=n=p=2$.*

Exercice II. Sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a,b,c\}$, on considère la substitution $a \mapsto ab$, $b \mapsto ac$, $c \mapsto a$. Soit λ le nombre réel positif tel que $\lambda^3 = \lambda^2 + \lambda + 1$. Démonter que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\sigma^n(a)|_a}{|\sigma^n(a)|} = \dfrac{1}{\lambda}$

Exercice III. On considère la substitution de Fibonacci : $\tau : a \mapsto ab$ et $b \mapsto a$.
1. Pour chaque entier n démontrer qu'il existe deux mots u_n et v_n tels que $\tau^n(a) = u_n v_n$ où u_n et v_n sont des palindromes *(un palindrome est un mot qui peut se lire dans les deux sens)*. Démontrer que cette décomposition est unique.
Le mot de Fibonacci est $X = \lim\limits_{n\to\infty} \tau^n(a)$.
2. Démontrer que pour chaque entier n, le mot infini X possède exactement $n+1$ facteurs de longueur n.
3. Démontrer que tous facteurs u et v de X de même longueur $||u|_a - |v|_a| \leq 1$

Exercice IV. Un mot (fini ou infini) w sur $\{a,b\}$ est équilibré si pour tout facteurs u et v de w de même longueur : $||u|_a - |v|_a| \leq 1$.
1. Montrer que si w est un mot équilibré alors pour tous facteurs u et v de w de même longueur : $||u|_b - |v|_b| \leq 1$.
2. Montrer que w n'est pas équilibré, si et seulement si, il existe un mot u tel que aua et bub sont deux facteurs de w.

Exercice V. Pour deux éléments d'un groupe on considère le commutateur $[u,v] = u^{-1}v^{-1}uv$.
1. Démontrer que $[u,v]^{-1} = [v,u]$.
2. Démontrer que u et v commutent si, et seulement si, $[u,v] = 1$.
3. Dans le groupe libre sur $\{a,b\}$, vérifier que $[a,b]$ est égal à un produit de trois carrés.
4. En déduire que tout groupe d'exposant deux est commutatif.

Exercice VI. Trouver une base du sous-groupe de $F_{\{a,b\}}$:

$$H =< b^2ab^{-1}a^{-2},\ a^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-2},\ b^3a^4b^3a,\ a^5b^{-1}ab^{-1}a > .$$

Exercice VII. Montrer que pour tout automorphisme ϕ de $F_{\{a,b\}}$, $\phi([a,b])$ est conjugué à $[a,b]$ ou à $[b,a] = [a,b]^{-1}$.

Exercice VIII. **1.** Soit $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
a. Calculer A_0B_0 et B_0A_0.
b. Montrer que ${A_0}^6 = {B_0}^4 = {A_0}^3{B_0}^2 = I_2$.
c. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est-il libre ?
2. Soit F le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On veut montrer que F est libre sur $\{A,B\}$.
a. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) & \to & \text{Homographies}(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$ est un morphisme de groupes.
Soit $\alpha = \varphi(A)$ et $\beta = \varphi(B)$.
b. Pour $k \in \mathbb{Z}$, calculer A^k, B^k, α^k et β^k.
c. Montrer que toutes les puissances non-nulles de β envoient l'intérieur du disque unité à l'extérieur du disque unité. Montrer que toutes les puissances non-nulles de α envoient l'extérieur du disque unité à l'intérieur du disque unité (pour cette dernière affirmation on pourra conjuguer α par $z \mapsto \frac{1}{z}$).
d. En déduire que si $\gamma = \alpha^{i_1}\beta^{i_2}\cdots\alpha^{i_{n-1}}\beta^{i_n}$ avec $i_k \neq 0$ pour $k = 2,\ldots,n-1$ alors γ est une homographie non-triviale.
e. Conclure que $< \alpha, \beta >$ est libre sur $\{\alpha, \beta\}$ et que F est libre sur $\{A,B\}$.