Exercice I. **1.** Rappeler et démontrer la construction du triangle de Pascal
2. Formule du multinôme : développer : $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n$.

Exercice II. **1.** Écrire la table de multiplication de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
2. Démontrer que l'ensemble des entiers de Gauss : $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un anneau. Donner les éléments inversibles de cet anneau.
3. Soit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or. Montrer que $\mathbb{Z}[\varphi] = \{a + b\varphi \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un anneau.

Exercice III. **1.** Pour deux nombres réels, $a < b$, montrer que l'ensemble $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[a; b]$ à valeurs réelles est un anneau (vous expliciterez l'addition, la multitplication et les éléments neutres 0 et 1).
2. Quels sont les éléments inversibles de cet anneau.
3. Donner deux fonctions non nulles $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ telles que $f \cdot g = 0$.

Exercice IV. **1.** Démontrer que $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps. Exprimer l'inverse de $a + ib$ en fonction de a et b.
2. Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps.

Exercice V. **1.** Démontrer que l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable.
2. Démontrer que l'ensemble des polynômes à coefficients réels a le cardinal du continu.
3. Combien y a-t-il de polynômes de degré 7 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

Exercice VI. **1.** Effectuer la division euclidienne de $3X^7 - 21X^5 + 2X^4 - X^3 + 7$ par $X^3 - 5X^2 + 2X$.
2. Démontrer que le polynôme $X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1$ divise $X^{15} - 1$.

Exercice VII. Trouver deux nombres x et y dont la somme est 6 et le produit est 10.

Exercice VIII. **Formules de Cardan.** **1.** Soit α_1, α_2 et α_3 les racines (complexes, pas nécessairement distinctes), d'un polynôme unitaire de degré 3 : $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$.
Démontrer que $-a = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $b = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$ et $c = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3$.

2. Soit α_1, α_2 et α_3 les racines (complexes, pas nécessairement distinctes), du polynôme : $P(X) = X^3 + pX + q$. Soit $A = \alpha_1 + j\alpha_2 + j^2\alpha_3$ et $B = \alpha_1 + j^2\alpha_2 + j\alpha_3$. Calculer AB et $A^3 + B^3$ en fonction de p et q.
a. Démontrer que les racines du polynômes sont solutions du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & j\alpha_2 & + & j^2\alpha_3 & = & A \\ \alpha_1 & + & j^2\alpha_2 & + & j\alpha_3 & = & B \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

b. Calculer α_1, α_2 et α_3 en fonction de A et B.

3. On cherche les racines α_1, α_2 et α_3 du polynôme $X^3 - 37X + 84$. On pose $p = -37$ et $q = 84$.
Cherchons X sous la forme $X = u + v$ en imposant la condition $3uv + p = 0$.
a. Calculer $u^3 + v^3$ et u^3v^3.
Pour travailler avec des nombres entiers, posons $u' = 3u$ et $v' = 3v$.
b. Démontrer que u'^3 et v'^3 sont les racines de $U^2 + 2\,268\,U - 1\,367\,631$.
c. Trouver u' et v' sous la forme $a + ib\sqrt{3}$ avec a et b des entiers
d. En déduire les racines de $X^3 - 37X + 84$.

Exercice IX. Dans La Géométrie, Descartes, propose de tracer les courbes polynomiales, grâce au dispositif décrit dans la figure jointe. Démontrer que si $YB = 1$ alors YE est égal au cube de YA.

Exercice X. **1.** Calculer une primitive de $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$ et de $g(x) = \dfrac{x^2 + 3}{(x-1)^3}$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 de $\dfrac{x}{\ln(1+x)}$.

Exercice XI. Tracer les courbes d'équations :

$$E : 5X^2 - 4XY + 8Y^2 - 3X + 2Y - 10 = 0 \quad \text{et} \quad H : -6X^2 + 24XY + Y^2 + 2Y = 0$$