Exercice I. Calculer
1. i^3 **2.** $(1+i)^2$ **3.** $(2+i)^3$ **4.** $(2-i)^3$ **5.** $(1+i\sqrt{3})^3$
6. $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$ **7.** $\left(\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)+i\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}\right)^5$ **8.** 2^i **9.** $2^{(1+i\pi)}$

Exercice II. Décrire l'ensemble des points dont l'affixe vérifie
1. $|z-i|=2$ **2.** $|z+3|=1$ **3.** $\left|\dfrac{z-2i}{z+1}\right|=1$
4. $z+\bar{z}=3$ **5.** $(1+2i)z+(1-2i)\bar{z}=5$ **6.** $(2-i)z+(2+i)\bar{z}=i$

Exercice III. Dans le plan complexe, placer les points d'affixes 1, $(1+i)$, $(1+i)^2$, $(1+i)^3$, etc.

Exercice IV. **1.** Placer dans le plan complexe le point d'affixe $A(2+4i)$ et tracer le cercle unité.
2. Quelles sont les affixes des points d'intersection de la droite (OA) et du cercle unité.
3. Soit B le point d'affixe $(1-2\sqrt{3})+i(2+\sqrt{3})$. Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

Exercice V. Calculer le module et l'argument des nombres
1. $1+i$ **2.** $\sqrt{3}-i$ **3.** $(1+i)(1-i\sqrt{3})$ **4.** $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

Exercice VI. Décrire l'ensemble des points dont l'affixe vérifie
1. $|z-i|=2$ **2.** $|z+3|=1$ **3.** $\left|\dfrac{z-2i}{z+1}\right|=1$
4. $z+\bar{z}=3$ **5.** $(1+2i)z+(1-2i)\bar{z}=5$ **6.** $(2-i)z+(2+i)\bar{z}=i$

Exercice VII. **1.** Soit u un complexe de module 1. Décrire l'ensemble des points dont l'affixe est de la forme $z=\dfrac{u+i}{u-1}$. Vous commencerez par placer les points correspondants à $u=i,-i,-1,\dots$
2. Soit x un nombre réel. Décrire l'ensemble des points dont l'affixe est de la forme $z=\dfrac{x+i}{x-1}$. Vous commencerez par placer les points correspondants à $x=-2,-1,0,2,\dots$
3. Soit y un nombre réel. Décrire l'ensemble des points dont l'affixe est de la forme $z=\dfrac{iy+i}{iy-1}$. Vous commencerez par placer les points correspondants à $y=-2,-1,0,1,2,\dots$

Exercice VIII. Soit ω une racine n-ième de l'unité. En dérivant la formule qui donne la somme partielle d'une série géométrique, calculer $1+2\omega+3\omega^2+\cdots+n\omega^{n-1}$.

Exercice IX. Linéariser : **1.** $\cos^3(x)$, **2.** $\sin^4(x)$, **3.** $\cos^3(x)\sin^2(x)$.

Exercice X. **1.** Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\dfrac{1-z}{1-iz}$ soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\dfrac{1-z}{1-iz}$ soit imaginaire pur.

Exercice XI. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes a, b et c.
1. Démontrer que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si $a+jb+j^2c=0$.
2. On ne suppose pas nécessairement que ABC est équilatéral. On construit à partir de ABC les trois triangles équilatéraux de base $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ construits à l'extérieur du premier. Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Le modèle de POINCARÉ du plan hyperbolique.

Soit H le demi-plan ouvert supérieur : $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Une homographie est une transformation de $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des nombres complexes et $ad - bc \neq 0$. Attention : une homographie n'est pas nécessairement définie dans tout le plan complexe. La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est associée à l'homographie.

1. Démontrer qu'une homographie est injective sur $\mathbb{C}$.
2. Démontrer que la matrice associée à la composée de deux homographies est le produit des deux matrices associées.

On suppose désormais que a, b, c, d sont des nombres réels que que $ad - bc > 0$.

3. Démontrer que l'homographie définie une bijection de H dans H.

Les transformations de la forme $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des nombres réels et $ad - bc > 0$ sont les **isométries directes** du demi-plan de POINCARÉ.

4. Démontrer que pour tout nombre complexe z_0 de H il existe une isométrie directe (c'est-à-dire une homographie avec a, b, c, d réels et $ad - bc > 0$) qui envoie z_0 sur i.
5. Déterminer toutes les isométries directes de H qui laissent i invariant.
6. Démontrer que pour tous nombres complexes z_0, z_1 de H il existe une isométrie directe qui envoie z_0 sur i et z_1 sur $\delta + i$ où δ est un nombre réel strictement positif.
7. Démontrer que δ est uniquement déterminé par z_0 et z_1.

Le nombre δ est la **distance hyperbolique** entre z_0 et z_1.

Une **droite** de H est soit un demi-cercle ouvert centré sur l'axe réel et inclus dans H, soit une demi-droite ouverte verticale partant de l'axe réel. On note $\mathcal{D}(H)$ l'ensemble des droites de H.

8. Soit A, B, C les points d'affixes i, $i + 1$, $2i$. Tracer les droites de H passant par A et B, par A et C, par B et C.
9. Démontrer que par deux points il passe une et une seule droite de H.
10. Tracer la droite de H passant par $i+3$ et $2i+6$. Remarquez que cette droite est disjointe (donc "parallèle") des droites (AB) et (AC).

Si on prend pour définition que deux droites sont parallèles si elles sont disjointes ou confondues alors le 5$^{\text{e}}$ postulat d'EUCLIDE est faux dans le plan hyperboloqie.

11. Démontrer qu'une isométrie directe de H transforme une droite de H en une droite de H (vous pourrez d'abord le faire pour des cas particuliers).

L'**angle** entre deux droites de H sécantes est l'angle formé par leurs tangentes au point d'intersection.

12. Démontrer que toutes les droites perpendiculaire à la droite (AC) sont parallèles entre elles.
13. Démontrer que deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.
14. Étant donné un point et une droite de H construire la perpendiculaire à cette droite passant par ce point (vous distinguerez les différents cas).