Exercice I. **1.** Écrire la table de multiplication modulo 6.

2. Écire la table de multiplication modulo 8.

3. Trouver grâce à cette table tous les couples (x, y) tels que $xy \equiv 1 \pmod 8$.

Exercice II. **1.** Dans $\mathbb{Z}/641\mathbb{Z}$, calculer $\overline{2}^{32} + 1$.

2. [EULER] En déduire que 641 divise $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297$.

(On a, en fait, $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$, où les deux facteurs sont premiers. Personne n'a jamais réussi à trouver un nombre de FERMAT $F_n = 2^{2^n} + 1$ *premier avec $n \geq 5$.)*

Exercice III. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ les équations et le système suivant :

(i) $\overline{5}x + \overline{4} = \overline{-1}$. (ii) $\overline{3}x + \overline{4} = \overline{0}$. (iii) $\overline{2}x + \overline{2} = \overline{0}$. (iv) $\begin{cases} \overline{3}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases}$

Justifier algébriquement la nature différente des résultats.

Exercice IV. **1.** Démontrer que le nombre $4^{12} + 2^6$ est un multiple de 13.

2. Quel est le reste de la division euclidienne de 2992^{217} par 5 ?

3. Montrer que $11 | 2^{123} + 3^{121}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9 | 2^{2n} + 15n - 1$.

Exercice V. On se place dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

1. **a.** Calculer l'inverse de 7

b. Résoudre l'équation $5x + 3 = 0$. **c.** Résoudre l'équation $4x + 10 = 0$.

2. **a.** Montrer que l'application $f : x \mapsto 7x + 3$ est bijective.

b. Trouver tous les x tels que $f(x) = x$.

3. Donner le cardinal du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times$.

4. **a.** Calculer 5^2, 5^3 et 5^6.

b. En déduire l'ordre de 5 dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times$

5. Donner explicitement un isomorphisme entre $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, 0)$ et $((\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times, \times, 1)$.

Exercice VI. Si $a \in \mathbb{Z}$, on notera $\overline{a}$ la classe de a modulo 61.

1. Quel est l'inverse de $\overline{50}$ dans le groupe multiplicatif $\left(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z}\right)^*$?

2. Quel est l'ordre de $\overline{50}$ dans le groupe multiplicatif $\left(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z}\right)^*$?

3. Déterminer le reste de 6150^{2002} modulo 61.

Exercice VII. On se place dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$.

1. Calculer l'inverse de $\overline{5}$.

2. Exactement la moitié des éléments de $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^* := \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \setminus \{\overline{0}\}$ sont des carrés. Lesquels ?

3. Dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$, résoudre l'équation $\overline{x}^2 + \overline{2} = \overline{0}$, puis $\overline{5}\overline{x}^2 + \overline{10} = \overline{0}$.

4. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{Z}$ le nombre $5x^2 + 10$ est-il divisible par 17 ?

Exercice VIII. **1.** Calculer $\varphi(15)$.

2. Dresser la table de CAYLEY de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$.

3. Calculer l'ordre de tout élément de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$. Le groupe $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ?

4. Mêmes questions pour $n = 10$, $n = 18$ et $n = 16$.

(Deux des quatre groupes sont cycliques.)

Exercice IX. **1.** Placer dans le plan complexe les racines 8^{e} de l'unité.

2. Pour $\omega = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, et pour chaque entier n tracer le segment reliant les points d'affixes ω^n et ω^{n+1}.

3. Pour $\xi = e^{\frac{i\pi}{4}}$, et pour chacun des points ζ de la question 1. tracer le segment reliant ζ et $\xi\zeta$.

Exercice X. **1.** **a.** Calculer $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$.

b. En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

2. En utilisant la formule de linéarisation, caculer $\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}$

3. En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et celle de $e^{\frac{2\pi}{5}}$.

4. Et construire le pentagone régulier à la règle et au compas, vous sauriez faire ?

Exercice XI. **1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$.

2. On considère le polynôme $P(z) = z^{15} - 1$.

a. Démontrer que 1, j et $\bar{j}$ sont racines de P.

b. Factoriser P par $z^2 + z + 1$.

3. Factoriser P en produit de polynômes irréductibles à coefficients entiers.

Exercice XII. Le DOBBLE. Sur chaque carte du DOBBLE, il y a 8 symboles (deux à deux distincts) déssinés. Les symboles sont choisis parmi une liste de 57 symboles. L'intérêt du jeu est que toute paire de cartes du jeu de DOBBLE a en commun exactement un symbole (qu'il faut découvrir le plus vite possible).

Cet exercice explique comment construire un tel jeu de cartes.

Pour cela on se souvient que deux droites distinctes du plan projectif ont toujours exactement un point en commun. Un symbole du jeu de DOBBLE est donc un point du plan projectif et une carte une droite du plan projectif.

Mais de quel plan parle-t-on ? de quels points parle-t-on ? de quelles droites parle-t-on ?

On choisit un nombre premier p et on se place dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Le plan projectif est l'ensemble des points projectifs $[x{:}y{:}z]$ où $x, y, z \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et ne sont pas tous les trois nuls. Attention un point a plusieurs représentants (à la manière des fractions) :

$$[x{:}y{:}z] = [x'{:}y'{:}z'] \iff xy' - x'y = xz' - x'z = yz' - y'z = 0$$

$$\iff \exists a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, x' = ax, y' = ay \text{ et } z' = az,$$

chaque point projectif a donc exactement $p - 1$ représentants.

1. a. Combien y a-t-il de points dans le plan projectif ?

b. Dessinez le plan projectif pour $p = 3$.

Une droite projective est l'ensemble des points projectifs $[x{:}y{:}z]$ qui vérifient une équation $ax + by + cz = 0$ où a, b, c sont des coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ non tous nuls.

2. a. Dessinez les droites projectives d'équation $x + y + z = 0$, $x - y = 0$.

b. Démontrez que deux droites projectives d'équations $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$ sont égales si et seulement si $[a{:}b{:}c] = [a'{:}b'{:}c']$.

c. Démontrez que deux droites distinctes ont exactement un point commun.

3. Combien y a-t-il de droites projectives dans le plan projectif ?

4. Combien y a-t-il de points sur une droite projective ?

5. Pour $p = 3$, $p = 5$ et $p = 7$ déterminez le nombre de cartes, le nombre total de symboles et le nombre de symboles sur chaque carte du DOBBLE.